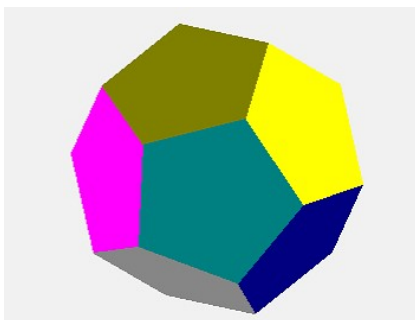


Elementær Matematik

Differentialregning



Indhold

Kap 1. Grænseværdi og kontinuitet	1
1. Grænseværdi	1
1.1 Regning med grænseværdier	3
1.2 Grænseværdier med uendelig	5
2. Kontinuitet	5
2.1 Sætninger om kontinuerte funktioner	6
Kap 2. Differentiabilitet	1
1. Differentialkvotient og tangent	1
2. Differentialkvotient for nogle simple funktioner	4
3. Regneregler for differentiation	5
4. Infinitesimalregning. Differentialer	9
4.1 Historisk note	9
5. Differentiation af sammensat funktion	11
6. Differentiation af omvendt funktion	14
6.1 Differentialkvotient for eksponentiel- og potensfunktioner	16
7. Det approksimerende 1. grads polynomium	16
8. Differentiation af sin, cos og tan	17
Kap 3. Monotoniforhold	20
1. Monotone funktioner	20
2. Lokalt maximum og lokalt minimum for en funktion	21
3. Middelværdisætningen	23
4. Hovedsætning om differentialkvotient og monotoniforhold	25
4.1 Bestemmelse af monotoniforholdene for en differentiabel funktion.	26
Kap 4. Asymptoter	29
1. Asymptoter til grafer for en funktion	29
2. Polynomier og polynomiumsbrøker for $x \rightarrow \pm\infty$	32
Kap 5. Numerisk løsning	34
1. ligninger	34
1.1 Bisektion	34
1.2 Regulæ falsi	34
1.3 Newton Raphsons metode	35
Kap 6. Funktionsundersøgelse	36
1. Undersøg og tegn	36

Kap 1. Grænseværdi og kontinuitet

1. Grænseværdi

Matematikken kan groft set dele op i Algebra og Analyse. I analysen anvender man også algebra, men tilføjer et væsentligt begreb, som kaldes *grænseværdi*. Grænseværdibegrebet er helt afgørende for udviklingen af *differential-* og *integralregningen*. Det er netop disse to discipliner, der er de mest anvendte i alle andre videnskaber, især fysik, kemi og økonomi.

Betragter vi funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, så er $f(2) = 0$. Tænker vi os, at vi lader x nærme sig til 2 (fra højre) gennem værdierne 2,1 ; 2,01 ; 2,001 ; 2,0001 osv. eller fra venstre 1,9 ; 1,99 ; 1,999 ; 1,9999 osv. så vil $f(x)$ (ikke overraskende) nærme sig til tallet 0.

Hvor banalt dette end kan lyde, så afspejler det en af grundlæggende egenskaber ved de reelle tal. De reelle tal ligger "uendelig tæt". Der er ikke én "efterfølger" til et reelt tal. Mellem to forskellige reelle tal, ligger der uendelig mange reelle tal.

Noget tilsvarende kan siges om de rationale tal, men der er alligevel en forskel. Denne forskel er mere subtil. For de reelle tal gælder nemlig, at grænseværdien (hvis den findes) for en følge af reelle tal er altid et reelt tal. Det er derimod relativt let af lave en følge af rationale tal (decimalbrøker), som nærmer sig til $\sqrt{2}$, mens $\sqrt{2}$ som bekendt ikke er et rationel tal.

Vi kunne også nævne, at som vist tidligere, så: $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ for $n \rightarrow \infty$

Vi siger, at $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, har grænseværdien 0 for x gående mod 2. Dette skrives matematisk:

$$(1.1) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad x \rightarrow 2$$

Det er lidt misvisende at sige, at man kan se dette på en graf af $f(x)$, fordi vi jo netop tegner grafen, så $f(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow 2$.

Mens grænseværdien af $f(x)$ kan synes helt banal, så stiller sagen sig helt anderledes, hvis funktionen *ikke* er defineret, der hvor vi ønsker at bestemme grænseværdien. Ser vi f.eks. på funktionen:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} ; x \neq 0$$

Så er $f(x)$ ikke defineret for $x = 0$, men derfor kan man godt tale om en eventuel grænseværdi for x gående imod 0. Vi understreger, at man ikke bare kan indsætte 0 på x ' plads, idet $\frac{0}{0}$ er udefineret, i den forstand, at det kan være grænseværdi for alle tal fra minus uendelig til uendelig.

Hvis man på grafregneren indsætter tal nær ved 0 i $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ vil man finde at jo tættere tallene er på plus/minus nul, jo tættere er $f(x)$ på tallet 1. Dette kan vi skrive symbolsk.

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{for} \quad x \rightarrow 0$$

Bemærk, at en funktion ikke behøver at være defineret i det "punkt", hvor man vil bestemme grænseværdien, og det er netop i sådanne tilfælde, at grænseværdibegrebet kan anvendes i en ikke trivial sammenhæng.

For at bygge teorien op, er det nødvendigt at formulere en præcis definition af grænseværdi. Til definitionen, skal vi anvende begrebet symmetriske omegne. Man har i denne forbindelse tradition for at betegne et lille tal med de græske bogstaver ε eller δ .

Talmængden

$$\omega(x_0): |x - x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

betegnes som en symmetrisk omegn omkring x_0 . En udprikket omegn er en omegn, hvor man har fjernet x_0 . Den kan skrives som:

$$\omega'(x_0): 0 < |x - x_0| < \delta$$

Formuleringen af at $f(x)$ har grænseværdien a , når x går imod x_0 er da:

Ligegyldig, hvor lille en omegn $\omega(a)$ man vælger omkring a , så kan man bestemme en udprikket omegn $\omega'(x_0)$ omkring x_0 , så når blot x tilhører $\omega'(x_0)$ så tilhører $f(x)$ omegnen $\omega(a)$.

Når man skal formulere matematiske sætninger, anvender man ofte to vendinger:

For ethvert x gælder: Skrives symbolsk med en *alkvantor*: $\forall x$:

Der findes et x for hvilket det gælder: Skrives symbolsk med en *eksistenskvantor*: $\exists x$:

For symbolet

$$(1.2) \quad f(x) \rightarrow a \quad \text{for} \quad x \rightarrow x_0$$

anvendes ofte en ækvivalent skrivemåde:

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Dette læses som "limes" $f(x)$ er lig med a , for x gående mod x_0 .

Med anvendelse af *alkvantor* og *eksistenskvantor*, kan vi nu give en mere kompakt *definition* af grænseværdi.

$$(1.4) \quad \begin{aligned} f(x) \rightarrow a \quad \text{for} \quad x \rightarrow x_0 &\quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \\ \forall \omega(a) : \exists \omega'(x_0) : x \in \omega'(x_0) &\Rightarrow f(x) \in \omega(a) \end{aligned}$$

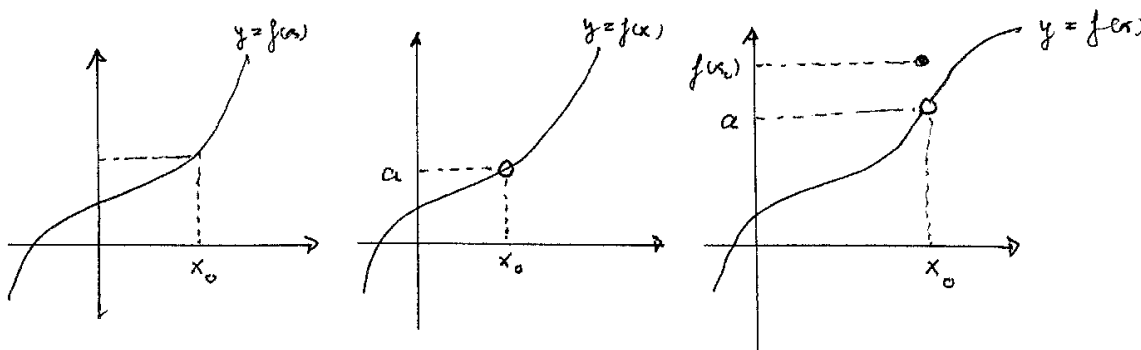
Det sidste læses som følger:

For *enhver* omegn omkring a , *eksisterer* (findes) der en udprikket omegn omkring x_0 , så når blot x tilhører den udprikkede omegn omkring x_0 så tilhører $f(x)$ omegnen omkring a .

Der findes en anden ækvivalent formulering af definition af grænseværdi

$$f(x) \rightarrow a \text{ for } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Nedenfor er vist 3 eksempler på en funktion, der alle har en grænseværdi i x_0 . Bemærk især, at funktionsværdien i x_0 er uden betydning. Eventuelt er funktionen slet ikke defineret i x_0 .

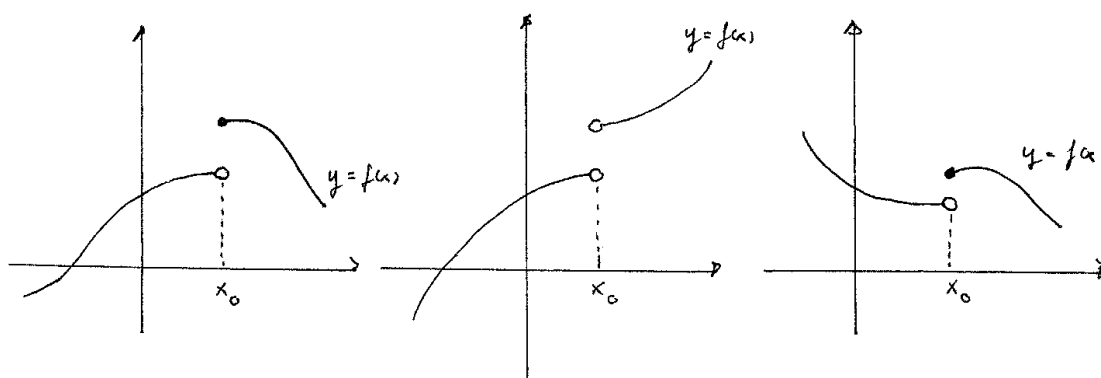


I den første figur, er grænseværdien i x_0 lig med funktionsværdien $a = f(x_0)$.

I den anden figur er f ikke defineret i x_0 . $f(x)$ har grænseværdien a for $x \rightarrow x_0$.

I det tredje tilfælde er $f(x_0) \neq a$. $f(x)$ har grænseværdien a for $x \rightarrow x_0$.

Nedenfor er vist 3 figurer, hvor $f(x)$ ikke har nogen grænseværdi for $x \rightarrow x_0$.



1.1 Regning med grænseværdier

Givet at $f(x)$ og $g(x)$ er defineret i en udprykket omegn af x_0 , og at de er *begrænsede* i en udprykket omegn omkring x_0 . "Begrænset" indebærer, at der findes en omegn $\omega(x_0)$, og tal M og K , således:

$$x \in \omega(x_0) \Rightarrow |f(x)| < K \text{ og } |g(x)| < M$$

endvidere, at de to funktioner har en grænseværdi for x gående mod x_0 .

$$f(x) \rightarrow a \text{ for } x \rightarrow x_0 \quad \text{og} \quad g(x) \rightarrow b \text{ for } x \rightarrow x_0$$

Vi vil da vise, at

$$(1.6) \quad k \in R \Rightarrow (kf)(x) \rightarrow ka \text{ for } x \rightarrow x_0$$

$$(1.7) \quad f(x) + g(x) \rightarrow a + b \text{ for } x \rightarrow x_0$$

$$(1.8) \quad f(x) - g(x) \rightarrow a - b \text{ for } x \rightarrow x_0$$

$$(1.9) \quad f(x) \cdot g(x) \rightarrow a \cdot b \text{ for } x \rightarrow x_0$$

$$(1.10) \quad \text{Hvis } b \neq 0 \text{ så gælder } \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{a}{b} \text{ for } x \rightarrow x_0$$

Vi vil ikke bevise alle sætningerne. Beviserne ligner meget hinanden. Vi beviser først (1.7). Vi skal for et forelagt ε bestemme et δ , således, at

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (a + b)| < \varepsilon$$

$|f(x) + g(x) - (a + b)|$ kan vurderes som følger:

$$|f(x) + g(x) - (a + b)| = |f(x) - a + g(x) - b| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b|$$

Da f og g har grænseværdierne a og b , kan vi bestemme et δ , således at:

$$|f(x) - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{og} \quad |g(x) - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Heraf følger

$$|f(x) + g(x) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Hvorved sætningen er bevist.

Vi viser dernæst (1.9). Vi skal for et forelagt ε bestemme et δ , således, at

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - (a \cdot b)| < \varepsilon$$

$|f(x) \cdot g(x) - (a \cdot b)|$ kan vurderes som følger:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - (a \cdot b)| &= |f(x) \cdot g(x) - a \cdot g(x) + a \cdot g(x) - a \cdot b| = \\ &= |(f(x) - a)g(x) + a \cdot (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| |g(x)| + |a| \cdot |g(x) - b| \leq \\ &= |f(x) - a| M + |a| \cdot |g(x) - b| \end{aligned}$$

Da f og g har grænseværdierne a og b , kan vi bestemme et δ , således at:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{1}{2M}\varepsilon \quad \text{og} \quad |g(x) - b| < \frac{1}{2a}\varepsilon$$

Heraf følger

$$|f(x) \cdot g(x) - (a \cdot b)| \leq |f(x) - a| M + a |g(x) - b| < \frac{1}{2M} \varepsilon M + a \frac{1}{2a} \varepsilon = \varepsilon$$

Hvorved sætningen er bevist.

1.2 Grænseværdier med uendelig

Vi vil kort introducere følgende formuleringer og skrivemåder, som man ofte støder på. Da betydningen af disse symboler er ret indlysende, anføres blot den formelle definition.

$f(x)$ går imod uendelig for x gående mod a

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall K \exists \delta: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

$f(x)$ går imod minus uendelig for x gående mod a

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall K \exists \delta: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$$

$f(x)$ går imod b for x gående mod uendelig

$$f(x) \rightarrow b \text{ for } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K: x > K \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$f(x)$ går imod b for x gående mod minus uendelig

$$f(x) \rightarrow b \text{ for } x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0: x < -K \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

2. Kontinuitet

Lidt løst formuleret, kan man sige, at *kontinuitet* af en funktion betyder at grafen hænger sammen. En endnu mere populær formulering er, at

En funktion $y = f(x)$ er kontinuert, "hvis man kan tegne grafen, uden at løfte blyanten fra papiret"

Dette svarer til den matematiske definition, hvor man definerer kontinuiteten i et punkt.

Lad $f(x)$ være defineret i en omegn $\omega(x_0)$ omkring x_0 . (Hvis x_0 er endepunktet for et interval, må man indskrænke sig til en højre omegn eller en venstre omegn).

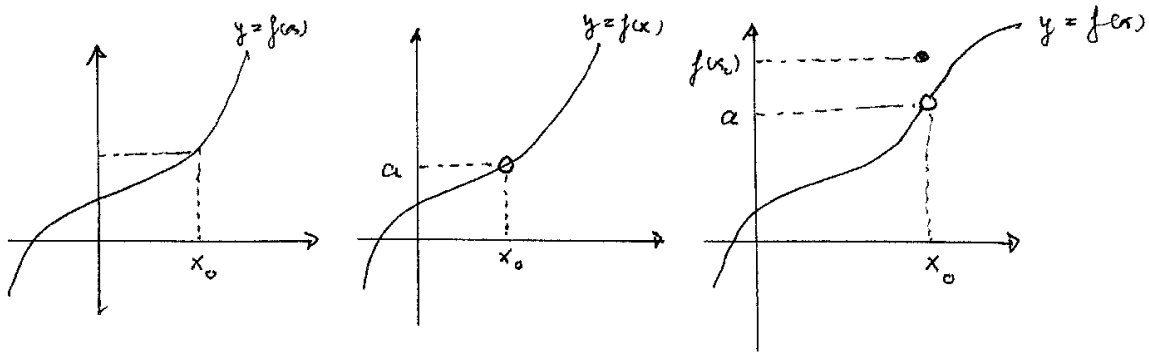
f er kontinueret i x_0

$$\Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(x_0) \text{ for } x \rightarrow x_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

som udtrykker, at f skal have en grænseværdi i x_0 og funktionsværdien $f(x_0)$ skal være lig med denne grænseværdi. Nedenfor er vist de samme 3 funktioner, som vi betragtede i afsnittet om grænseværdi. Den første er kontinuert i x_0 , Den anden har en grænseværdi, men den er ikke kontinuert, da den

ikke er defineret i x_0 . Den tredje har også en grænseværdi i x_0 , men den er ikke kontinuert, da grænseværdien i x_0 , ikke lig med funktionsværdien.



2.1 Sætninger om kontinuerte funktioner

Der gælder nogle vigtige sætninger om kontinuerte funktioner. Beviserne for disse sætninger er imidlertid ret "tekniske", så vi næver blot sætningerne uden bevis.

(2.2) For en kontinuert funktion gælder det, at billedmængden af et interval er et interval.

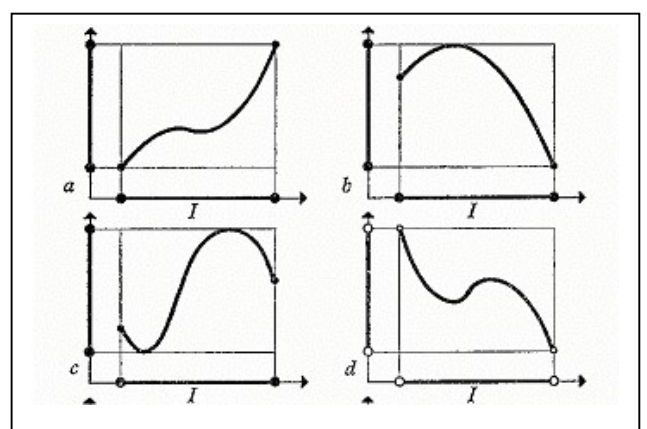
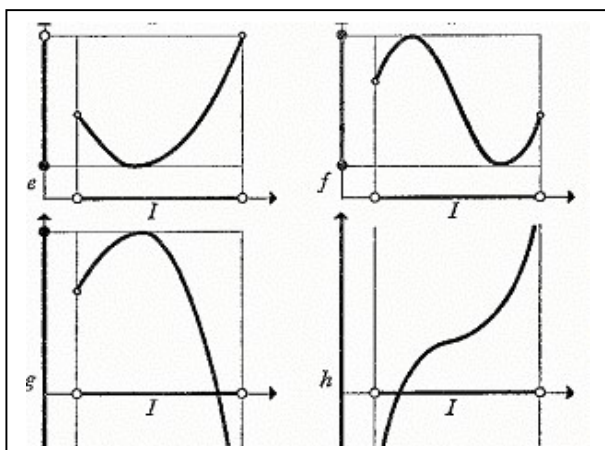
(2.3) Billedmængden for et lukket interval er et lukket interval.

Af den sidste sætning følger næsten umiddelbart

(2.4) En kontinuert funktion har i et lukket interval en størsteværdi og en mindsteværdi.

(2.5) Hvis en kontinuert funktion har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi, så antager den alle værdier mellem størsteværdien og mindsteværdien.

Nedenfor er vist graferne for nogle funktioner, som illustrerer sætningerne (2.1) til (2.5)



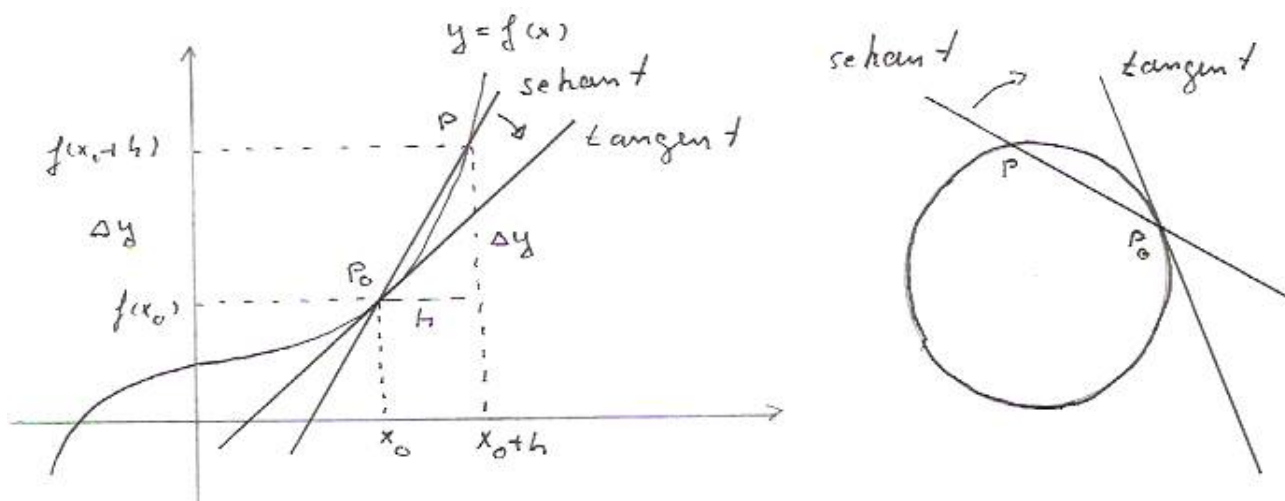
Kap 2. Differentiabilitet

1. Differentialkvotient og tangent

For at forklare differentiabilitet af en funktion er, så har vi brug for to begreber, nemlig, funktions-tilvækst for en funktion $y = f(x)$ ud fra et punkt x_0 : $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ og tangent til grafen for en funktion.

Tangent har hidtil kun været indført, som cirkeltangent. Man definerer i almindelighed en cirkeltangent, som en linie, der kun skærer cirklen i et punkt. En *sekant* derimod er en linie, der skærer cirklen i to punkter. Man kan nu generalisere tangentbegrebet til at omfatte alle kurver, og dermed også grafen for en funktion.

Gennem det faste punkt, hvor man ønsker at bestemme tangenten tegnes en sekant. Sekanten skærer kurven i det faste punkt og i et variabelt punkt. Hvis man lader det variable punkt bevæge sig hen imod det faste punkt, vil sekanten dreje omkring det faste punkt og i almindelighed have en grænsestilling, når de to punkter falder sammen til et punkt. Denne grænsestilling (hvis den findes og er den samme, når man nærmer sig fra begge sider) kaldes en *tangent* til kurven i det faste punkt. Se figurene nedenfor.



Vi stiller os nu den opgave, at bestemme hældningskoefficienten for tangenten i et punkt af grafen for en funktion $y = f(x)$. Lad det faste punkt være $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Vi giver nu x_0 en tilvækst h , hvorved vi får punktet $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Funktionstilvæksten er $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, svarende til tilvæksten $\Delta x = h$.

Linien, der forbinder $P_0 = (x_0, f(x_0))$ med $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ er en *sekant* til grafen for $y = f(x)$

Hældningskoefficienten for sekanten er for alle $h \neq 0$:

$$(1.2) \quad a_{\text{sekant}} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Denne brøk kaldes for *differenskvotienten*.

Tænker vi os nu, at vi lader h gå imod 0, vil differenskvotienten til stadighed være hældningskoefficienten for sekanten.

Hvis sekanten har en grænsestilling når h går imod 0, så er tangenten denne grænsestilling for sekanten. Hældningskoefficienten for tangenten vil da være *grænseværdien* for sekantens hældningskoefficient. Der vil da gælde:

$$(1.3) \quad a_{\text{tangent}} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Grænseværdien $f'(x_0)$ (hvis den eksisterer) kaldes for differentialkvotienten af $f(x)$ i x_0 , og den læses "f mærke af x_0 " eller *den afledede af $f(x)$ i x_0* .

Uafhængig af den geometriske fortolkning af tangenten som grænsestilling for en sekant, definerer man nu i al almindelighed.

(1.4) Lad $f(x)$ være defineret i en omegn af x_0 .

Hvis brøken (*differenskvotienten*) $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

har en grænseværdi for h gående mod 0, siges $f(x)$ at være *differentiabel* i x_0 med differentialkvotienten lig med denne grænseværdi.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Vores program er nu, at bestemme differentialkvotienten for alle de funktioner, vi kender, men først vil vi se på et enkelt eksempel, hvor vi direkte anvender definitionen. Når man skal finde differentialkvotienten for en funktion, deler man ofte opgaven i 3 trin, heraf navnet *3-trinsreglen*.

1) Bestem funktionstilvæksten $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$

2) Dan differenskvotienten: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

3) Find grænseværdien $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, (hvis den eksisterer) for $h \rightarrow 0$.

1.5 Eksempel.

Lad $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

$y = f(x)$ er en parabel med toppunkt i (2,1). Vi vil bestemme en ligning til tangenten til grafen for f i $x_0=1$.

Vi vælger først at bestemme differentialkvotienten for f i et vilkårligt punkt x_0 .

Man anvender 3-trins reglen.

$$1. \quad \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - 2(x_0 + h) + 3 - \left(\frac{1}{2}x_0^2 - 2x_0 + 3\right) = x_0h - 2h + \frac{1}{2}h^2$$

$$2. \quad \frac{\Delta y}{h} = \frac{x_0h - 2h + \frac{1}{2}h^2}{h} = x_0 - 2 + \frac{1}{2}h$$

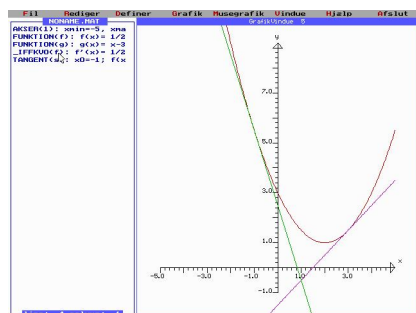
$$3. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (x_0 - 2 + \frac{1}{2}h) = x_0 - 2$$

Af den sidste ligning konkluderer vi, at $f'(x) = x - 2$.

Vi finder da tangentligningen for $x=1$. Hældningskoefficienten er $f'(1) = -1$, og $f(1) = \frac{3}{2}$. Tangentligningen bliver da

$$\text{ifølge formelen: } y - y_0 = a(x - x_0). \quad y - \frac{3}{2} = -1(x - 1) \quad \text{eller} \quad y = -x + \frac{5}{2}$$

På figuren nedenfor er grafen for f og linien tegnet. Man ser, at det er en tangent i 3 og -1



Ligningen for linien gennem punktet (x_0, y_0) , og som har hældningskoefficienten a er som bekendt:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Tangenten gennem $(x_0, f(x_0))$ og som har hældningskoefficienten $f'(x_0)$ er derfor:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \\ y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Før vi går i gang med at bestemme differentialkvotienter for forskellige funktioner, viser vi følgende ikke særlig overraskende sætning:

(1.5) Hvis f er differentiabel i x_0 , så er f også kontinuert i x_0 .

At f er kontinuert i x_0 , kan vi udtrykke

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow f(x_0) \text{ for } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow (\text{Vi sætter } x = x_0 + h) \\ f(x_0 + h) &\rightarrow f(x_0) \text{ for } x_0 + h \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \\ f(x_0 + h) - f(x_0) &\rightarrow 0 \text{ for } h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \\ \Delta y &\rightarrow 0 \text{ for } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

At f er differentiabel i x_0 , kan vi udtrykke:

$$\frac{\Delta y}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0$$

Heraf følger:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{h} h \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \text{ for } h \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \text{ for } h \rightarrow 0$$

som viser kontinuiteten af f i x_0

2. Differentialkvotient for nogle simple funktioner

Vi vil vise at funktionen $f(x) = k$ (konstant) er differentiable for alle x og at $f'(x) = 0$.

Vi anvender 3-trinsreglen:

$$1) \Delta y = k - k = 0 \quad 2) \frac{\Delta y}{h} = 0 \quad 3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = 0$$

Vi vil vise at funktionen $f(x) = x$ er differentiable for alle x og at $f'(x) = 1$.

Vi anvender 3-trinsreglen.

$$1) \Delta y = (x_0 + h) - x_0 = h \quad 2) \frac{\Delta y}{h} = 1 \quad 3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = 1$$

Vi vil vise at funktionen $f(x) = x^2$ er differentiable for alle x og at $f'(x) = 2x$.

Vi anvender 3-trinsreglen:

$$1) \Delta y = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2$$

$$2) \frac{\Delta y}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = 2x_0$$

Vi vil vise at funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ er differentiable og at $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Vi anvender 3-trinsreglen:

$$1) \Delta y = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h)x_0} = -\frac{h}{(x_0 + h)x_0}$$

$$2) \frac{\Delta y}{h} = -\frac{h}{h(x_0 + h)x_0} = -\frac{1}{(x_0 + h)x_0}$$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x_0 + h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Vi vil vise at funktionen $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$ er differentiable for $x > 0$ og at $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Vi anvender 3-trinsreglen:

$$1) \Delta y = \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}$$

$$2) \frac{\Delta y}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

Vi kan ikke umiddelbart finde grænseværdien af differenskvotienten, så vi laver følgende omskrivning, idet vi ganger med $(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})$ i tæller og nævner, og anvender kvadratsætningen $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{\sqrt{x_0+h}^2 - \sqrt{x_0}^2}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{(x_0+h) - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$\sqrt{x_0+h} \rightarrow \sqrt{x_0}$ for $h \rightarrow 0$ fordi $\sqrt{x}$ er kontinuert! Vi får derfor

$$3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

3. Regneregler for differentiation

Lad der være givet, at $f(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $f'(x_0)$ og at $g(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $g'(x_0)$. Der gælder således:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad \text{og} \quad \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0$$

Vi vil da vise, at

$(f+g)(x)$ er differentiabel i x_0 med

$$(3.1) \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$(f-g)(x_0)$ er differentiabel i x_0 med

$$(3.2) \quad (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$$

Disse to sætninger kan sammenfattes i formuleringen: *Man kan differentiere ledvis.*

Den næste sætning viser, at *en faktor sættes udenfor ved differentiation*

Hvis $k \in \mathbb{R}$, så er $(kf)(x_0)$ differentiabel i x_0 med

$$(3.3) \quad (kf)'(x_0) = kf'(x_0),$$

Man kan derimod *ikke* differentiere "produktvis" eller "kvotientvis". Der gælder derimod:

$(f \cdot g)(x_0)$ er differentiabel i x_0 med

$$(3.4) \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

Hvis $g(x_0) \neq 0$ så er $(\frac{f}{g})(x_0)$ differentiabel i x_0 med

$$(3.5) \quad (\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

I beviserne for disse sætninger, går det ud på at omskrive differens-kvotienten, så vi kan udnytte, at

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0 \quad \text{og} \quad \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \rightarrow g'(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0$$

Bevis for differentiabiliten af $(f+g)$.

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta y &= (f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0) = f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0)) \\ \Delta y &= f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0) \\ 2. \quad \frac{\Delta y}{h} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ 3. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Ved beviset har vi anvendt at grænseværdien af en sum er lig med summen af grænseværdierne. Beviset for $(f - g)$ forløber helt analogt.

Bevis for differentiabiliten af (kf) ved hjælp af tretrinsreglen.

$$\begin{aligned} 1) \quad \Delta y &= (kf)(x_0+h) - (kf)(x_0) = kf(x_0+h) - kf(x_0) = k(f(x_0+h) - f(x_0)) \\ 2) \quad \frac{\Delta y}{h} &= \frac{k(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} = k \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ 3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = kf'(x_0) \end{aligned}$$

Bevis for differentiabiliten af $(f \cdot g)$ ved hjælp af tretrinsreglen.

$$1) \quad \Delta y = (f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0) = f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Vi kan ikke umiddelbart finde grænseværdien, hvis vi anvender dette udtryk, så vi laver en omskrivning, idet vi adderer og subtraherer størrelsen $f(x_0) \cdot g(x_0+h)$

$$\Delta y = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\Delta y = (f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))$$

$$2) \quad \frac{\Delta y}{h} = \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Vi har ved grænseovergangen anvendt regnereglerne for grænseværdier, samt at $g(x_0 + h) \rightarrow g(x_0)$ for $h \rightarrow 0$

Hvilket følger af, at $g(x)$ er kontinuert i x_0 , fordi $g(x)$ er antaget differentiabel i x_0 .

Heraf fås regnereglen for differentiation af et produkt af to funktioner

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Bevis for differentiabiliteten af $(\frac{f}{g})$.

$$1) \quad \Delta y = (\frac{f}{g})(x_0 + h) - (\frac{f}{g})(x_0) = \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Vi kan ikke umiddelbart finde grænseværdien, hvis vi anvender dette udtryk, så vi sætter på en fælles brøkstreg, og subtraherer og adderer størrelsen $f(x_0) \cdot g(x_0)$

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - g(x_0 + h)f(x_0)}{g(x_0 + h)g(x_0)}$$

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) - (g(x_0 + h)f(x_0) - f(x_0)g(x_0))}{g(x_0 + h)g(x_0)}$$

$$\Delta y = \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{g(x_0 + h)g(x_0)}$$

$$2) \quad \frac{\Delta y}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)}$$

$$3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h)g(x_0)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

Vi har ved grænseovergangen anvendt regnereglerne for grænseværdier, samt at $g(x_0 + h) \rightarrow g(x_0)$ for $h \rightarrow 0$, hvilket følger af at $g(x)$ er kontinuert i x_0 , fordi $g(x)$ er antaget differentiabel i x_0 .

3.6 Eksempel. Vi vil anvende regnereglerne til at finde differentialkvotienten for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, som vi så på i eksempel (1.5), hvor vi bestemte den ud fra tretrinsreglen.

Vi differentierer ledvis og sætter konstanterne udenfor ved differentiation.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = x - 2$$

Hvilket er det samme resultat, som vi tidligere fandt direkte.

3.7 Eksempel. Vi vil bestemme differentialkvotienten for funktionen $f(x) = x^2 \sqrt{x}$; $x > 0$.

Ifølge regnereglen

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{med } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{får man: } f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

3.8 Eksempel. Vi vil bestemme differentialkvotienten for funktionen $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; $x > 0$.

Ifølge regnereglen

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$\text{Med } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x_0) = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}x^2}{x} = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\sqrt{x}}{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

3.9 Eksempel. Vi vil vise, at differentialkvotienten af $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, er $f'(x) = nx^{n-1}$.

Vi skal gøre dette ved et såkaldt *induktionsbevis*.

Lad os antage at $f(n)$ er en formel, der anhænger af n . Det kunne f.eks. være summen af alle hele positive tale fra 1 til n .

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Vi påstår, at:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Det ses umiddelbart, at formel er rigtig for $n=1$, idet $f(1)=1$.
2. Vi antager nu, at formlen er rigtig for $n=p$, og hvis vi under denne antagelse kan vise at formlen også er rigtig for $n=p+1$, slutter vi,
3. at den er rigtig for alle positive hele tal n .

Hvis formlen nemlig er gyldig for $n=1$, har vi bevist, at den også er gyldig for $n=2$, og hvis den er gyldig for $n=2$, så er den også gyldig for $n=3$, osv.

I det konkrete tilfælde er et ret let at bevise 2: $f(n+1)=f(n)+n+1$.

$$f(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = f(n+1)$$

Vi vender nu tilbage til differentiation af $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$.

Formlen er rigtig for $n=2$, idet vi har vist at $f'(x) = 2x = 2x^{2-1}$

og vi antager, at der gælder $f'(x) = nx^{n-1}$.

Vi differentierer nu $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ efter produktreglen.

$$f'(x) = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$$

Da formlen er rigtig for $n=2$, kan vi slutte, at den er rigtig for $n=3 \dots$ osv.

Med denne formel er vi i stand til at differentiere et vilkårligt polynomium, f.eks. $f(x) = -4x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x - 9$

$$f'(x) = -16x^3 + 24x^2 - 14x + 2$$

3.10 Eksempel. Vi vil bestemme differentialkvotienten af $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$; $x \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$.

Vi anvender brøkreglen $f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}; \quad x \neq 0; \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Bemærk, at det er den samme regneregler, som vi havde for $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$

4. Infinitesimalregning. Differentialer

4.1 Historisk note

Historisk set er differentialregningen udviklet parallelt af Newton og Leibnitz. Af denne grund findes der stadig to forskellige måder at betegne differentialkvotienten på. Skrivemåden $f'(x)$ skyldes Newton, idet han dog mest anvendte skrivemåden $\dot{s}(t)$ for differentialkvotient af $s(t)$ med hensyn til tiden. (Læses s -punkt). Denne notation anvendes stadig blandt fysikere.

Fra Leibnitz stammer betegnelsen infinitesimalregning, som er synonymt med "differential" og "integralregning".

Som begrundet nedenfor betegnede Leibnitz $f'(x)$ med symbolet $\frac{dy}{dx}$, hvor dy og dx betegnes som

differentialer af henholdsvis $y (= f(x))$ og x . På denne måde bliver *differentialkvotienten* skrevet som en kvotient mellem to *differentialer*.

Hvis vi i differenskvotienten skriver Δx i stedet for h (hvilket faktisk er mere naturligt), kan man med denne notation opskrive to identiske definitioner på differentialkvotient.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Betegnelsen $\frac{dy}{dx}$ har altid været problematisk i introducerende kurser i differentialregning. Nogle

bøger vælger at sige, at $\frac{dy}{dx}$ er ét symbol for $f'(x)$, og det ikke kan skilles ad i tæller og nævner. (For derefter alligevel, at skille symbolet ad, når man kommer til integralregningen).

Hvis man derimod opfatter symbolet $\frac{dy}{dx}$, som en kvotient mellem dy og dx , så bliver man nødt til at forklare, hvorledes dy og dx skal opfattes.

Problemet ligger i, at man ved differentiation, ser på grænseværdien af forholdet mellem funktions-tilvæksten $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ og tilvæksten Δx , (som vi for kortheds skyld har kaldt h), når Δx går imod nul. Altså grænseværdien for $\Delta y/\Delta x$, når Δx (og dermed Δy) går imod 0.

I grænsen er såvel Δx som Δy lig med nul, og Leibnitz, (som er ene af differentialregningens fædre), indførte betegnelserne dx og dy for *grænseværdierne* af Δx og Δy . dx og dy blev betegnet som *infinitesimale*, dvs. uendelig små tilvækster, svarende til de endelige tilvækster Δx og Δy . *Grænseværdierne* af Δx og Δy (dx og dy) er begge nul, men alligevel regner man med dem, som om de var endelige størrelser. Leibnitz regnede selv ubekymret med infinitesimale størrelser, (og det gjorde matematikere i ca. 200 år efter), men moderne matematikere har ikke været så begejstrede for at regne med dem af flere grunde. For eksempel indebærer det, at man ganger og dividerer med størrelser, der faktisk er nul, som om de var endelige.

Regnereglerne for infinitesimale størrelser er dog også lidt anderledes, end regning med reelle tal. Hvis der f.eks. står $dx + (dx)^2$ så er det lig med dx , fordi $(dx)^2$ er 0 af højere orden!

Man kan imidlertid vise, at regning med infinitesimale størrelser kommer ud på det samme, som at regne med endelige tilvækster, når man til slut dividerer med Δx og tager grænseværdien for Δx gående imod $(dx) 0$.

Som sagt så ynder moderne matematikere ikke regning med infinitesimale størrelser, men alligevel har man bevaret symbolerne dx og dy . I de fleste andre naturvidenskaber, især i fysik, regner man fuldstændig ubekymret med infinitesimale størrelser. Det er fordi det er langt hurtigere og lettere end den tungere, men eksakte grænseovergang.

4.1.1 Eksempler fra matematikken.

Vi vil bestemme differentialkvotienten af $f(x) = x^3$ ved infinitesimalregning. Vi udregner derfor $dy = f(x+dx) - f(x)$.

$$dy = (x + dx)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 dx + 3dx^2 + dx^3 - x^3 = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Vi har i udtrykket ovenfor sat alle "højere ordens led" i dx lig med nul. Resultatet er, som man ser korrekt.

4.1.2 Eksempler fra fysikken.

Hvis $s = s(t)$ betegner positionen af en partikel på en akse og t betegner tiden, kan man bestemme hastigheden omkring tidspunktet t , som $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ hvor man umiddelbart slutter, ved at lade $\Delta t \rightarrow 0$, at $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$.

Helt tilsvarende kan man for accelerationen af definitionen $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ slutte at $a = \frac{dv}{dt}$

Man definerer i matematikken *differential*et dy af en funktion $y = f(x)$, som differentialkvotienten af $f(x)$ gange dx .

$$(4.2) \quad dy = f'(x)dx$$

Dette er en definition af dy , men hvad er dx ? Her afviger elementære lærebøger en del. I en matematik bog, kan man *ikke* skrive at det er en infinitesimal størrelse, som man gør det i fysik og alle andre naturvidenskabelig sammenhænge. Tricket kan da være, at man finder dy for funktionen $y=f(x)=x$. Så finder man: $dy = dx$ (da $y = x$), og $dy = dx = 1 \cdot dx = dx$, ifølge definitionen.

Altså $dx = dx$, er et symbol, der er givet ved sin egen definitions ligning. Matematisk set er dette helt konsistent, men begrebsmæssigt skal man nok tænke på en *infinitesimal* størrelse, når man skriver dx .

Fordelen ved at anvende differentialer er den, at en hel del sætninger bliver indlysende, når man anvender differentialer. Sætninger, der ellers kræver et længere og ikke altid ukompliceret bevis.

5. Differentiation af sammensat funktion

Lad der været givet funktionerne $y = f(x)$ og $z = g(x)$, således at $V_m(f) \subseteq D_m(g)$. Man kan så danne den sammensatte funktion

$$(5.1) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

5.2 Sætning.

Antag nu at f er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $f'(x_0)$, at g er differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med differentialkvotienten $g'(y_0) = g'(f(x_0))$.

Vi vil da vise, at $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Ved regning med differentialer er sætningen meget let at "bevise". Der gælder nemlig:

$$dy = f'(x)dx \wedge dz = g'(y)dy \Rightarrow dz = g'(y)f'(x)dx$$

og hermed

$$(5.3) \quad \frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x_0) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Differentiationsreglen (5.3) kaldes ofte for kæderegele, idet vi blot har indskudt dy i tæller og nævner.

Reglen udsiger, at man differentierer $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ved først at differentiere g med hensyn til $y = f(x)$, og derefter multiplicerer med differentialkvotienten af $f(x)$.

5.5 Eksempel.

Vi vil finde differentialkvotienten af $h(x) = (3x^2 - 7)^5$.

Funktionen er sammensat af $g(y) = y^5$ og $f(x) = 3x^2 - 7$. Vi finder derfor:

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = 5y^4 6x = 5(3x^2 - 7)^4 6x = 30x(3x^2 - 7)^4.$$

Meget hurtigt holder man op med at indføre en hjælpevariabel, men differentiere med hensyn til et funktionsudtryk, *som om det var en variabel*. Dette er søgt vist i det næste eksempel

5.6 Eksempel

Vi vil bestemme differentialkvotienten af $f(x) = \sqrt{-2x^3 + 4x^2 + 6}$.

Funktionen er sammensat af $\sqrt{x}$ og $-2x^3 + 4x^2 + 6$.

Man differentierer "udefra". Den første funktion er kvadratrodsfunktionen. Den differentierer man "med hensyn til det der står under kvadratroden", som om det var en enkelt variabel. Dernæst ganger man med differentialkvotienten af et som står under kvadratrodstegnet.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-2x^3 + 4x^2 + 6}} (-6x^2 + 8x)$$

5.7 Eksempel

Man kommer ofte ud for funktioner, der er sammensat af mere end to funktioner. Regelen er imidlertid den samme, man differentierer funktionerne "udefra" og ganger differentialkvotienterne sammen indtil man når til x .

Vi vil bestemme differentialkvotienten af $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 2x)^3}$.

Funktionen er sammensat af $\frac{1}{x}$, x^3 and $\sqrt{x} + 2x$

I denne rækkefølge, med differentialkvotienter: $-\frac{1}{x^2}$, $3x^2$ og $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$.

Vi får derfor differentialkvotienten:

$$f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x} + 2x)^6} 3(\sqrt{x} + 2x)^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)$$

Vi vil nu give et matematisk korrekt bevis for kæderegele. Betegnelserne er de samme, som i starten af dette afsnit. For at lave et bevis, er det nødvendigt at give definitionen af differentiability en lidt anden formulering. Hertil har vi brug for et nyt begreb, kaldet en *epsilon-funktion*.

En epsilon-funktion (skrives: $\varepsilon(x)$ eller $\varepsilon(h)$) er en funktion, der er defineret i en *udprikket omegn* omkring 0 og som har grænseværdien 0 i 0. Der gælder altså:

$$(5.8) \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad h \rightarrow 0$$

Enhver funktion, som har denne egenskab kaldes en epsilon funktion.

Vi kan da omskrive lidt på definitionen af differentiabilitet.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{h} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) \quad \text{for} \quad h \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) &\rightarrow 0 \quad \text{for} \quad h \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) &= \varepsilon(h) \quad \text{er en epsilonfunktion} \quad \Leftrightarrow \\ f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \quad \Leftrightarrow \\ (5.9) \quad \Delta y &= f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \quad \Leftrightarrow \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \end{aligned}$$

Vi viser nu differentiabiliteten af $g \circ f$ på sædvanlig vis ved først at udregne funktionstilvæksten Δz .

$$\Delta z = (g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))$$

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{og} \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y$$

Dette indsættes i udtrykket for Δz . Da g er antaget differentiable i y_0 , kan Δz skrives, ved anvendelse af en ε -funktion.

$$\Delta z = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y$$

Herefter finder man med division med h .

$$\frac{\Delta z}{h} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{h} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{h} \rightarrow g'(y_0)f'(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) \quad \text{for} \quad h \rightarrow 0$$

Vi har her anvendt, at $\Delta y \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$, fordi $y=f(x)$ er kontinuert i x_0 , fordi f er differentiable i x_0 . Dette viser at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{h} = g'(y_0)f'(x_0)$$

6. Differentiation af omvendt funktion

Ligesom der gælder en regneregul for differentiation af *sammensat* funktion, gælder der en regel for differentiation af *omvendt* funktion.

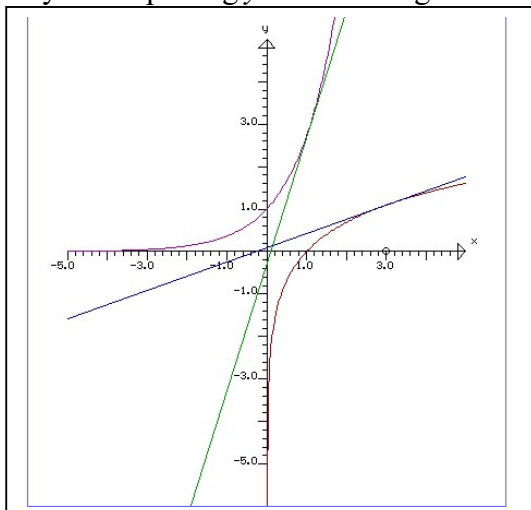
Vi minder om, at hvis f er en *injektiv* funktion har den en omvendt funktion (regneforskrift), som betegnes f^{-1} , og hvor der gælder følgende:

$$(6.2) \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{eller ved at ombytte } x \text{ og } y \quad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$y = f(x)$ og $x = f^{-1}(y)$ har samme grafiske billede. (x, y) er jo det samme punkt, da de to ligninger en ensbetydende), mens graferne for $y = f(x)$ og $y = f^{-1}(x)$ fremgår af hinanden ved spejling i linien $y = x$. Ved denne spejling, vil (x, y) netop blive afbildet i (y, x) .

Det er derfor ikke særlig overraskende, at hvis $y = f(x)$ er differentiabel i x_0 og $f'(x_0) \neq 0$, så vil f^{-1} være differentiabel i det tilsvarende $y_0 = f(x_0)$.

Da differentialkvotienten $f'(x_0)$ er hældningskoefficienten for tangenten, og da denne hældningskoefficient kan beregnes ud fra to punkter som $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, så må man kunne finde hældningskoefficienten for spejlingen af denne tangent i $y = x$, (som må være tangenten til $y = f^{-1}(x)$ i y_0) ved at bytte om på x og y . Dette er søgt illustreret på figuren nedenfor.



Ud fra en geometrisk betragtning, burde der så gælde:

$$(f^{-1})'(y_0) = (x_2 - x_1)/(y_2 - y_1) = 1/f'(x_0)$$

Dette vil vi nu bevise, idet vi viser *sætningen*:

Lad $y = f(x)$ være en *injektiv* funktion, som er differentiabel i x_0 med $f'(x_0) \neq 0$. Den omvendte funktion $x = f^{-1}(y)$ er da differentiabel i y_0 med:

$$(6.3) \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{hvor} \quad y_0 = f(x_0)$$

Ved anvendelse af regning med differentialer er sætningen næsten triviel, idet:

$$\begin{aligned} y_0 = f(x_0) &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x_0) \quad \text{og} \quad x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y_0) \\ (f^{-1})'(y_0) &= \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{hvor} \quad y_0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Bevis: Vi minder om (fra afsnittet om differentiation af sammensat funktion), at

$$f \text{ er differentiabel i } x_0 \Leftrightarrow \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

hvor $\varepsilon(h)$ er en epsilonfunktion, dvs. $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

Vi vil nu skrive Δx i stedet for h . (Δx er det samme som h). Ligningen bliver da f er differentiabel i $x_0 \Leftrightarrow$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

For den omvendte funktion $x = f^{-1}(y)$ vil tilsvarende gælde (hvis den er differentiable i y_0):

$$2. \quad (f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{hvor } y_0 = f(x_0)$$

Vi vil da bevise 2), hvis vi antager 1). Vi danner differenskvotienten for f^{-1} ud fra punktet y_0 .

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x} \quad \text{eller ved at forkorte brøken med } \Delta x$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)}$$

Vi bemærker for det første, at nævneren ikke kan blive nul for tilstrækkeligt små Δx , da $f'(x_0) \neq 0$ ifølge antagelse og $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$ for $\Delta x \rightarrow 0$. Endvidere gælder det, at $\Delta x \rightarrow 0$ for $\Delta y \rightarrow 0$, da $f^{-1}(y)$ er kontinuert. (Den omvendte funktion til en kontinuert funktion er kontinuert.) Vi finder derfor.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{og dermed} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{hvor } y_0 = f(x_0)$$

Hvorned sætningen er bevist.

6.4 Eksempel

Vi vil nu anvende sætningen på funktionen: $y = f(x) = \ln x$, som har den omvendte funktion $x = e^y$.

I integralregningen viser man, at $\ln(x)$ er en *stamfunktion* til $\frac{1}{x}$, hvilket betyder, at

$$(6.1) \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}; \quad x > 0$$

Vi skal anvende dette resultat, når vi skal finde differentialkvotienten af e^x , som er den omvendte funktion til $\ln(x)$.

$x = f^{-1}(y) = e^y$, og hvor $f'(x) = (\ln x)' = 1/x$, og hold så fast!

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0} \quad \text{og derfor} \quad (e^y)' = e^y \quad \text{eller} \quad (e^x)' = e^x$$

Funktionen $f(x) = e^x$ har den helt specielle egenskab, at den er sin egen differentialkvotient. Det er den eneste funktion, som har denne egenskab.

6.5 Øvelser:

1. Find den omvendte funktion til $f(x) = x^n$ for $x > 0$. Find dernæst differentialkvotienten til denne funktion.

2. $f(x) = \tan x$ er monoton i intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$, og den har derfor en omvendt funktion i dette interval, som kaldes for

$$y = \tan^{-1}(x). \quad \text{Vis at } (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

3. $f(x) = \sin x$ er monoton i intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$, og den har derfor en omvendt funktion i dette interval, som kaldes for

$$y = \sin^{-1}(x). \text{ Vis at } (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.1 Differentialkvotient for eksponentiel- og potensfunktioner

En *eksponentialfunktion* $f(x) = a^x$ er differentiabel for alle x med

$$(6.6) \quad f'(x) = a^x \ln a$$

Dette følger af omskrivningen

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a} \Rightarrow f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

En *potensfunktion* $f(x) = x^a$ hvor $x > 0$ er differentiabel for alle a med

$$(6.7) \quad f'(x) = ax^{a-1}$$

Dette følger af omskrivningen

$$f(x) = x^a = e^{a \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

Bemærk især, at reglen for differentiation af en potensfunktion er den samme, som vi tidligere udledte for heltallige eksponenter.

7. Det approximerende 1. grads polynomium

Denne lidt foruroligende formulering, bygger imidlertid blot over en anden måde at formulere tangentligningen på. Udgangspunktet er imidlertid lidt anderledes. Vi erindrer fra afsnit 5. om, hvorledes man kan formulere differentiabiliteten af en funktion ved hjælp af en epsilon funktion.

$$f \text{ er differentiabel i } x_0 \Leftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

Hvor $\varepsilon(h)$ er en epsilon funktion: $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

Hvis h er "lille" er $\varepsilon(h)h$ "lille" af højere orden, og man kan i den første tilnærmelse til at beregne $f(x_0 + h)$ anvende udtrykket:

$$(7.1) \quad f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

Det er i almindelighed dette udtryk man betegner som det *approximerende 1. grads polynomium*, idet til tilnærmer (approximerer) $f(x_0 + h)$ i omegnen af x_0 .

Indfører man imidlertid i udtrykket $y = f(x_0 + h)$ og $h = x - x_0$. får man tangentligningen i x_0 .

$$(7.2) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tidligere anvendte man det approximerende 1. grads polynomium til at beregne tilnærmede funktionsværdier.

7.3 Eksempel

Vi ønsker at bestemme en tilnærmet værdi for $\sqrt{4,2}$, og vi anvender (7,1).

$$f(4,2) = f(4+0,2) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0,2 = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,2 = 2 + 0,05 = 2,05$$

Et opslag på en lommeregner viser, at et nøjagtigt resultat er 2,0494.

8. Differentiation af sin, cos og tan

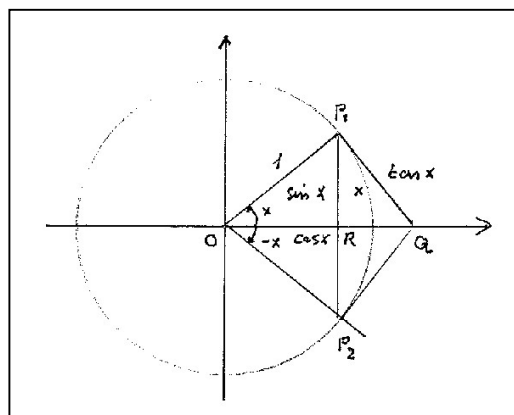
$f(x) = \sin x$ er defineret på hele den reelle akse. Vi vil vise, at $\sin x$ er differentiabel for alle x , og at

$$(\sin x)' = \cos x$$

For at bevise differentiabiliteten af $\sin x$ er det dog først nødvendigt at vise, at

$$(8.1) \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

Dette vises ad geometrisk vej, idet vi på figuren nedenfor har tegnet en enhedscirkel med centrum i O, hvor vi har afsat vinklerne x og $-x$, samt tegnet (halv)tangenter i de to retningspunkter P_1 og P_2 . Tangenterne skærer hinanden på x -aksen i punktet Q (på grund af symmetrien omkring x -aksen).



Hvert af stykkerne $|P_1Q|$ og $|P_2Q|$ er lig med $\tan x$, som det ses ud fra den retvinklede trekant OP_1R .

For en cirkel gælder det, at perimeteren for en indskreven polygon er mindre en cirkelns perimeter, som igen er mindre end perimeteren for en omskreven polygon.

Anvender man dette på cirkelbuen fra P_1 til P_2 , som har længden $2x$, får man for $0 < x < \frac{\pi}{2}$ uligheden:

$$(8.2) \quad 2 \sin x < 2x < 2 \tan x \Leftrightarrow \sin x < x < \tan x \Leftrightarrow$$

$$\sin x < x \quad \wedge \quad x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad \wedge \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Hvis $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, så er uligheden uforandret idet $\sin(-x) = -\sin x$ og $\cos(-x) = \cos(x)$, så

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Hvis vi lader x gå imod nul, vil uligheden gælde under hele grænseovergangen, idet der dog godt kan gælde lighedstegn i grænsen.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Leftrightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Af den sidste ulighed fremgår at $\frac{\sin x}{x}$ går imod 1, når x går imod 0.

Vi vil nu vise at $\sin x$ er differentiabel i x_0 . Differenskvotienten er

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2 \cos\left(\frac{x_0 + h + x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x_0 + h - x_0}{2}\right)}{h} = \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

Vi har ved den første omskrivning anvendt den logaritmiske formel for addition/subtraktion af to sinus-funktioner:

$$\sin u - \sin v = 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

I det sidste led flytter vi faktoren 2 ned i nævneren som $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Det sidste udtryk kan vi finde grænseværdien af, hvis vi anvender at,

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \rightarrow 1 \text{ for } h \rightarrow 0 \text{ på grund af, at } \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \text{ for } x \rightarrow 0$$

$$(8.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0)$$

Hvilket viser, at $\sin x$ er differentiabel for alle x og at $(\sin x)' = \cos x$.

Vi kan nu vise differentiabiliteten af $\cos x$ ved omskrivningen: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ og differentiere sinus-funktionen som en sammensat funktion.

$$(8.4) \quad (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x$$

Hvilket viser, at $\cos x$ er differentiabel for alle x og at $(\cos x)' = -\sin x$.

Vi kan da vise at $\tan x$ er differentiabel i hele sin definitionsmængde og

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Vi viser dette ved at anvende brøkreglen for differentiation på $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

8.5 Eksempel

Nedenfor vises differentialkvotienten af nogle funktioner, der er sammensatte funktioner med de trigonometriske. Vi antager, at x befinder sig i definitionsmængden for funktionen.

1. $f(x) = \sin^3 x \Rightarrow f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$
2. $f(x) = \sin x^3 \Rightarrow f'(x) = (\cos x^3) 3x^2$
3. $f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x$
4. $f(x) = \ln(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\tan x$

Kap 3. Monotoniforhold

1. Monotone funktioner

En funktions *monotoniforhold* drejer sig om, hvorvidt en funktion er voksende eller aftagende eller ingen af delene. Vi minder om nogle definitioner fra 1g.

Definition: En funktion f er voksende i et interval I , hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$ gælder:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Definition: En funktion f er aftagende i et interval I , hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$ gælder:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Geometrisk betyder dette, at grafen for f bevæger sig henholdsvis "opad" eller "nedad".

Endvidere minder vi om begreberne *maximum* og *minimum*, også kaldet størsteværdi og mindsteværdi. Maximum og minimum for en funktion f , skrives $\max(f)$ og $\min(f)$.

Definition: $f(x_0) = \max(f)$ siges at være *størsteværdi* eller *maximum* for en funktion i et interval I , hvis der for alle $x \in I$ gælder:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Minimum defineres helt tilsvarende.

$f(x_0) = \min(f)$ er minimum for f i et interval I , hvis der for alle $x \in I$ gælder:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

Ikke alle funktioner har et maximum eller minimum, og en funktion kan godt have maximum eller minimum i flere forskellige punkter.

Eksempel:

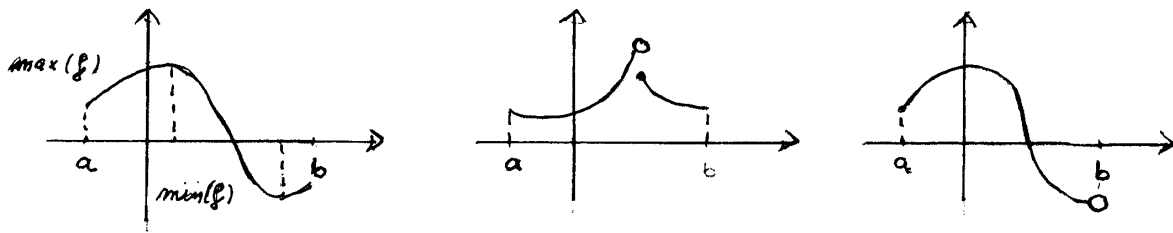
$f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$, har minimum $f(0)=0$, men den har intet maximum.

$g(x) = 1/x$; $x > 0$ har hverken maximum eller minimum.

f er nedad begrænset, mens g ikke er begrænset.

Der gælder imidlertid følgende vigtige sætning, som har været omtalt i indledningen til differentialregningen, men ikke bevist. Et matematisk bevis ville kræve en dybere forståelse af de reelle tal. (En konvergent følge af reelle tal har altid netop et reelt tal som grænseværdi) Vi udelader derfor beviset, men sætningen er illustreret nedenfor ved en række eksempler.

Sætning: Hvis en funktion f er *kontinuert* i et *lukket interval* $I = [a, b]$, så har f såvel en størsteværdi som en mindsteværdi i intervallet.



Den første figur opfylder betingelserne for såvel max som min. Den anden figur har ingen størsteværdi, fordi den ikke er overalt kontinuert, og den sidste figur har ingen mindsteværdi, fordi intervallet ikke er lukket.

2. Lokalt maximum og lokalt minimum for en funktion

Vi skal nu definere begreberne *lokalt maximum* og *lokalt minimum*.

Til dette har vi brug for endnu et begreb, nemlig en *omegn* omkring et punkt x_0 . En omegn omkring x_0 , skrives $\omega(x_0)$.

Definition:

En omegn $\omega(x_0)$ omkring x_0 er et interval, som har x_0 som *indre punkt*. (dvs. ikke et endepunkt).

Eksempel:

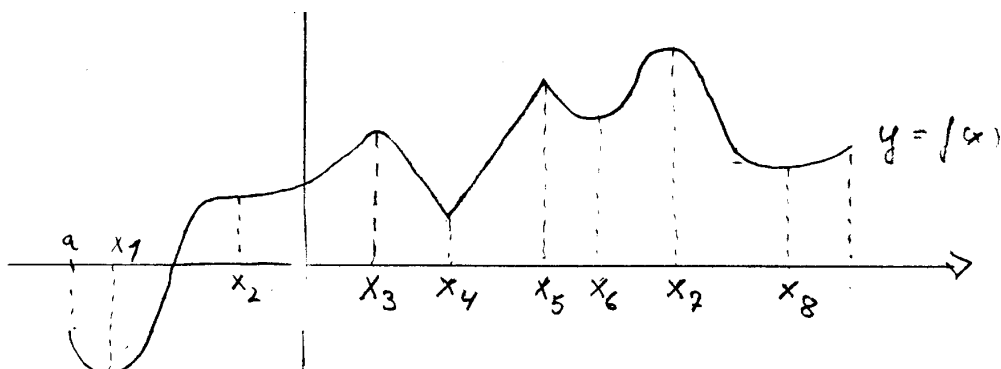
Hvis $x_0 = -1$, så er intervallerne $]-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $]-3, -0,75[$ og $[-1,25, -0,25]$ alle omegne omkring x_0 .

Definition:

En funktion f har *lokalt maximum* (*lokalt minimum*) i x_0 , hvis der findes en omegn omkring x_0 , så $f(x_0)$ er maximum (minimum) i denne omegn.

Altså, der findes en omegn $\omega(x_0)$ omkring x_0 , således at $x \in \omega(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

Begreberne lokalt max. og lokalt min. er illustreret nedenfor.



f har lokalt min. i x_1 , x_4 , x_6 og x_8 .

f har lokalt max. i x_3 , x_5 , x_7 .

f har (globalt) max. i x_7 .

f har (globalt) min. i x_1 .

Vi vil da vise følgende meget vigtige sætning.

Lad f være en funktion, der er differentiabel i en omegn omkring x_0 . Hvis f har lokalt max. eller lokalt min. i x_0 , så er $f'(x_0) = 0$.

Bevis:

Vi beviser sætningen for *lokalt min* i x_0 , beviset for lokalt max forløber helt analogt.

Hvis f har lokalt min, så vil der for passende små værdier af en tilvækst h gælde:

$$h > 0 \Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0)$$

$$h < 0 \Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0)$$

Heraf finder vi: $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ Uafhængigt af h 's fortegn.

Heraf følger ved division med h :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{for } h > 0 \quad \text{og} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{for } h < 0$$

Begge brøker er imidlertid *differenskvotienten* $\Delta y/h$ for henholdsvis $h > 0$ og $h < 0$. Da f er forudsat differentiabel i x_0 , har disse to brøker samme grænseværdi for $h \rightarrow 0$. Det følger imidlertid af ulighederne ovenfor, at

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{h} \geq 0 \quad \text{og} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{h} \leq 0 \quad \text{og hermed}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{h} = 0$$

Hvorned sætningen er bevist.

Sætningen har en simpel geometrisk fortolkning, idet $f'(x_0) = 0$ betyder, at grafen for f har en *vandret tangent* i x_0

Når $f'(x_0) = 0$ siges funktionen at have *ekstremum* i x_0 . Vi har set, at f har ekstremum i et lokalt max. eller lokalt min., men det viser sig, at der også er to andre muligheder.

Af sætningen følger, at vi kan bestemme punkterne, hvor en *differentiabel* funktion har lokalt max. eller lokalt min. ved at løse ligningen.

$$f'(x) = 0 \quad \text{med hensyn til } x$$

Ser vi f.eks. på figuren side 28 er f ikke differentiabel i x_4 og x_5 , så disse ekstremumpunkter kan ikke bestemmes ved at løse ligningen $f'(x) = 0$. Til gengæld ses, at $f'(x_2) = 0$, hvor der hverken er lokalt max. eller min. I dette tilfælde siges f at have *en vandret vendetangent*.

Ovenstående sætning, kan drages i anvendelse, når man ønsker at bestemme værdimængden for en kontinuert funktion i et lukket interval. Af sætningen om max. og min. for en kontinuert funktion i et lukket interval følger nemlig, at vi kun behøver at udregne funktionsværdien i nedenstående 3 typer af punkter:

- Endepunkterne for intervallet $[a, b]$: $f(a)$ og $f(b)$.
- Punkter hvor $f'(x) = 0$: $f(x_1), f(x_2), \dots$
- Punkter, hvor f ikke er differentiabel, men hvor f godt kan have lokalt max eller lokalt min.

Eksempel:

1. Vi vil bestemme værdimængden for funktionen $f(x) = \sqrt{x} - 2x$; $x \in [0, 1]$.

$$f(0)=0 \text{ og } f(1) = -1$$

$$f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1/(2\sqrt{x}) - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \quad f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}$$

$$f \text{ er differentiabel for } x > 0, \text{ så } V_m(f) = [-1, \frac{1}{8}]$$

2. Lad os antage, at man har $2 \cdot a = 100$ m hegn, og man ønsker at lave en rektangulær indhegning med det størst mulige areal. Kaldes den ene sidelængde på indhegningen for x , er den anden sidelængde $(2 \cdot a - 2x)/2 = a - x$. Arealet $A(x)$ af indhegningen er $A(x) = x(a-x) = a \cdot x - x^2$; $0 < x < a$

$$A(0) = A(a) = 0.$$

$$A'(x) = a - 2x; A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a$$

$$A(x) \text{ er overalt differentiabel, så } A_{\max} = A(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4} a^2.$$

Hvis man skal finde værdimængden i et åbent interval, er situationen ikke meget forskellig fra ovenstående, idet man så blot skal finde grænseværdien (hvis den eksisterer) i endepunkterne for det åbne interval. Der gælder nemlig sætningen:

(2.4) *Billedmængden af et interval for en kontinuert funktion er et interval.*

Vi illustrerer sætningen med et par eksempler.

3. Vi vil bestemme værdimængden for $f(x) = x^2 e^{-x}$, hvor $x \in [0, \infty[$. Vi differentierer derfor $f(x)$ og løser $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

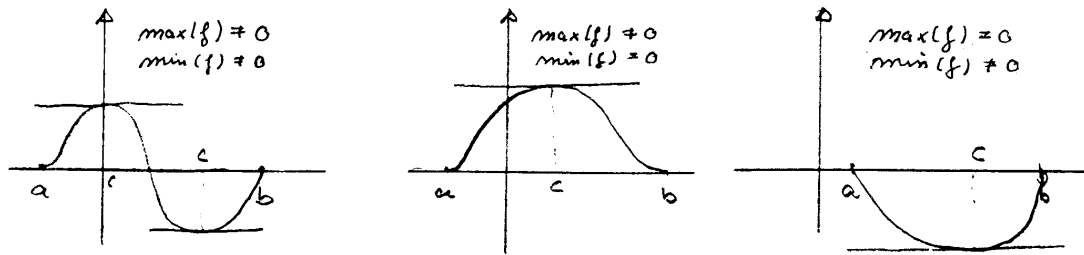
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$f(0) = 0; f(2) = 4e^{-2}; \text{ og } f(x) \rightarrow 0+ \text{ for } x \rightarrow \infty \quad \text{Værdimængden er derfor } [0, 4e^{-2}]$$

3. Middelværdisætningen

Rolles sætning:

Hvis en funktion f er kontinuert i det lukkede interval $[a, b]$ og differentiabel i det åbne $]a, b[$ således at $f(a) = f(b) = 0$, så findes der mindst et punkt c , hvor $f'(c) = 0$.



Ovenfor er Rolles sætning illustreret ved 3 eksempler.

Bevis:

Da f er kontinuert i $[a, b]$ har f både en størsteværdi og en mindsteværdi i intervallet. Hvis både $\max(f)$ og $\min(f)$ er i endepunkterne er de begge 0, og $f(x) = 0$ er konstant lig med 0 i $[a, b]$. Heraf følger, at $f'(x) = 0$ i $[a, b]$, og sætningen er trivielt opfyldt i dette tilfælde.

Hvis ikke både $\max(f)$ og $\min(f)$ er i endepunkterne er mindst en af dem i et indre punkt $c \in]a, b[$. Her har f imidlertid lokalt ekstremum, og ifølge en tidligere sætning er $f'(c) = 0$, hvorefter sætningen er vist.

Rolles sætning er i sig selv ikke så interessant, men den anvendes til at bevise den meget vigtige middelværdisætning.

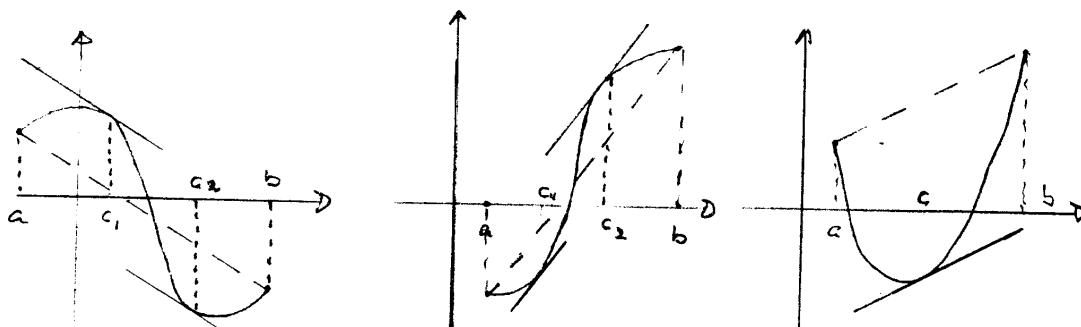
Middelværdisætningen:

Lad en funktion f være kontinuert i det lukkede interval $[a, b]$ og differentiabel i det åbne $]a, b[$. Der findes da mindst et indre punkt $c \in]a, b[$, hvor

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrisk udtrykker middelværdisætningen, at der findes mindst et indre punkt i intervallet $[a, b]$, hvor grafen for f har en tangent, som er parallel med linien der forbinder endepunkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ for grafen. Denne linies hældningskoefficient er nemlig lig med højre side af ligningen ovenfor.

Nedenfor er middelværdisætningen geometrisk illustreret ved 3 eksempler.



Bevis:

Vi indfører en hjælpefunktion $l(x)$, som er den *lineære* funktion, som forbinder endepunkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ for grafen. Det er nemt at opstille et regneudtryk for $l(x)$, men det er ikke nødvendigt for beviset.

Der gælder (trivielt), at $l(a) = f(a)$ og $l(b) = f(b)$. Vi ser da på funktionen $g(x) = f(x) - l(x)$.

Om denne funktion gælder $g(a) = f(a) - l(a) = 0$ og $g(b) = f(b) - l(b) = 0$.

g er kontinuert i $[a, b]$, da både f og l er det. Og g er differentiabel i $]a, b[$, da både f og l er det.

g opfylder således betingelserne for *Rolles sætning* i intervallet $[a, b]$, og der findes derfor mindst et $c \in]a, b[$, således at $g'(c) = 0$. Vi finder ved differentiation

$$g'(x) = f'(x) - l'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hvormed sætningen er bevist

4. Hovedsætning om differentialkvotient og monotoniforhold

Ved anvendelse af middelværdisætningen er vi nu i stand til at bevise en *hovedsætning* om sammenhængen mellem monotoniforhold og fortegnet for differentialkvotienten for differentiable funktioner.

I det følgende vil vi med I og I_0 betegne et interval og det tilsvarende åbne interval.

Hvis $I = [a, b]$ er $I_0 =]a, b[$

(4.1) *Sætning:*

Lad en funktion f være kontinuert i et interval I og differentiabel i det tilsvarende åbne interval I_0 .

Hvis der for alle $x \in I_0$ gælder:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ voksende i } I$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ aftagende i } I$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f \text{ konstant i } I$$

Bevis:

Vi beviser kun sætningens 1. del. 2. og 3. del bevises helt analogt.

Lad x_1 og x_2 være vilkårlige tal i intervallet I , og $x_1 < x_2$. Ifølge *middelværdisætningen* (anvendt med $a = x_1$ og $b = x_2$), findes der mindst et $c \in]x_1, x_2[$, således at:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $f'(x) > 0$ i I_0 ifølge antagelsen, gælder der at $f'(c) > 0$. Uafhængig af beliggenheden af x_1 og x_2 , vil der derfor gælde uligheden

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Af denne ulighed kan man da slutte:

$$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

Hvis brøken og nævneren er positive, så er tælleren også positiv. Eller ved at omskrive lidt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

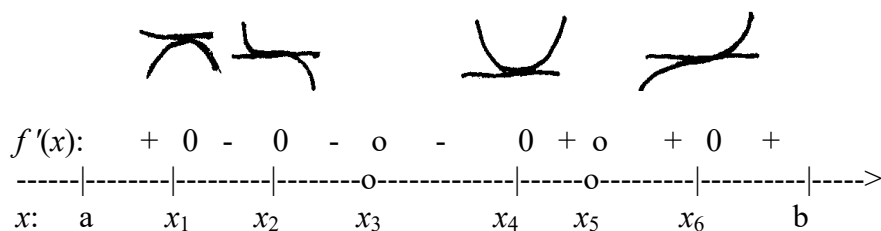
hvilket er definitionen på at f er voksende, hvormed sætningen er bevist.

4.1 Bestemmelse af monotoniforholdene for en differentiabel funktion.

Lad f være en vilkårlig funktion, der er defineret og differentiabel i et interval, eventuelt på nær et endeligt antal punkter, hvor den enten ikke er defineret eller ikke differentiabel. For at undersøge monotoniforholdene, er det ifølge hovedsætningen tilstrækkeligt at undersøge fortegnet for $f'(x)$. I praksis gøres dette altid ved at:

- Udregne $f'(x)$
- Løse ligningen: $f'(x) = 0$
- Lave en fortegnsvariation for $f'(x)$.

Lad os antage at en funktion i et interval $[a, b]$ ikke er defineret i x_3 og x_5 , og at $f'(x) = 0$ har løsningerne $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_4$, og $x = x_6$. Vi laver da en *fortegnslinie*, som vist nedenfor:



Oven over fortegnslinien er skitseret grafens forløb omkring nulpunkterne for f' . Fortegnene for *monotonintervallerne* er fundet enten ved at betragte funktionsudtrykket for $f'(x)$, eller ved at indsætte en værdi x i intervallet og udregne $f'(x)$.

Vi kan da ifølge den foregående sætning slutte, at:

f er voksende i intervallerne $[a, x_1]$, $[x_4, x_5[$, $]x_5, b]$.
 f er aftagende i intervallerne $[x_1, x_3[$ og $]x_3, x_4]$.
 f har lokalt max i x_1 og f har lokalt min i x_4 .

f har en vandret vendetangent i x_2 og i x_6 .

4.2 Eksempel

Vi vil bestemme monotoniforholdene for funktionen $f(x) = x^2 e^{-x}$; $\text{Dm}(f) = \mathbb{R}$.

Vi udregner differentialkvotienten ifølge produktreglen:

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = xe^{-x}(2-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Fortegnslinien bliver derfor:

$$\frac{f'(x)}{x} \mid \begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \quad 0 \\ 0 \quad \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \end{array} >$$

Af fortegnsvariationen for $f(x)$ slutter vi, at

f er aftagende i intervallerne $[-\infty, 0]$ og $[2, \infty[$
 f er voksende i intervallet $[0, 2]$

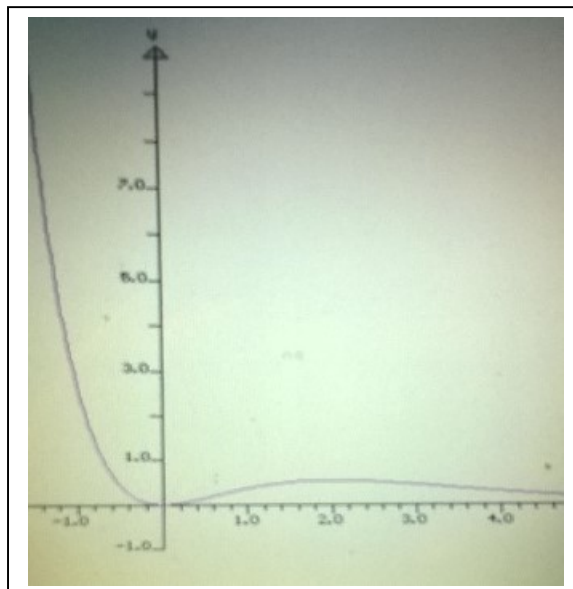
Da $f(x) > 0$ for alle $x \neq 0$, og $f(0) = 0$ ses, at f har lokalt (og globalt) minimum for $x = 0$,
 $f(x)$ har lokalt max for $x = 2$.

Endvidere ses det, (hvilket begrundes nedenfor) at

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow -\infty \quad \text{og} \quad f(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty$$

Værdimængden for f er derfor $[0, \infty[$

Nedenfor er vist et foto af grafen:



Faktisk har vi ikke ført et formelt bevis for at $x^2 e^{-x}$ går imod 0 for x gående mod uendelig, men dette kan bevises. Vi ser først på nedenstående eksempel.

Eksempel

4. Vi vil bestemme værdimængden for $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $x > 0$. Vi differentierer og sætter $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$$

Vi ser, at $f'(x) > 0$ for $]0, e^2[$, så $f(x)$ er voksende $]0, e^2]$, tilsvarende er $f(x)$ aftagende $[e^2, \infty[$. $f(x)$ har dermed sin størsteværdi for $x = e^2$ og $f(e^2) = 2/e < 1$.

Vi ser da på $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2}{e} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty$$

$$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty$$

Herefter kan vi vise, at $\frac{\ln x}{x^a} \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$ for $a > 0$ ved omskrivningen:

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \frac{\ln x^a}{x^a} = \frac{1}{a} \frac{\ln y}{y} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty \text{ i det } y = x^a \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow \infty, \text{ når } a > 0$$

Vi ser da på funktionen: $g(x) = \frac{x^a}{e^x}$ for $x \rightarrow \infty$, når $a > 0$

$$\ln(g(x)) = \ln\left(\frac{x^a}{e^x}\right) = a \ln x - x = x\left(a \frac{\ln x}{x} - 1\right) \rightarrow \infty(0 - 1) = -\infty$$

Når den naturlige logaritme af en funktion går imod minus uendelig, går selve funktionen mod 0. Vi slutter da, at

$$g(x) = \frac{x^a}{e^x} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty, \text{ når } a > 0$$

Ved hjælp af omskrivningen $a^x = e^{x \ln a}$ er det lige så let at vise, at $\frac{x^b}{a^x} \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, når $a > 1$ og $b > 0$.

Resultaterne kan løst formuleres som, at en potensfunktion altid vinder over en logaritmefunktion og at en eksponentialfunktion altid vinder over en potensfunktion.

Dette kan ind imellem være lidt overraskende. Ser vi f.eks. på $\frac{x^{100}}{(1.01)^x}$, så vil dette ifølge sætningen gå imod nul for $x \rightarrow \infty$. Vi vil undersøge, hvor stor x skal være for at brøken er mindre end 1. Ved at løse ligningen

$$\frac{x^{100}}{(1.01)^x} = 1 \Leftrightarrow \log\left(\frac{x^{100}}{(1.01)^x}\right) = 0 \Leftrightarrow \log(x^{100}) - \log((1.01)^x) = 0 \Leftrightarrow 100 \log(x) - x \log(1.01) = 0 \text{ på en grafregner,}$$

finder man at $x = 117308,27$.

Kap 4. Asymptoter

1. Asymptoter til grafer for en funktion

En asymptote er altid en ret linie, som funktionen "i en eller anden grænse" tilnærmer sig til. Man deler asymptoter op i 3 tilfælde: *Lodrette* asymptoter, *vandrette* asymptoter og *skrå* asymptoter.

En vandret asymptote har ligningen $y = b$. Vandrette og skrå asymptoter forekommer kun for $x \rightarrow \infty$ eller $x \rightarrow -\infty$. Hvis der om en funktion $y = f(x)$ gælder, at forskellen mellem $f(x)$ og b , går imod nul for x gående mod uendelig eller minus uendelig, så har f en vandret asymptote:

Opskrevet mere formelt, så skal der gælde, når $y = f(x)$ har en vandret asymptote for $x \rightarrow \infty$

$$(1.1) \quad f(x) - b \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty \quad (\text{eller } x \rightarrow -\infty)$$

Tilsvarende siger man, at $y = f(x)$ har en skrå asymptote $y = ax + b$ for $x \rightarrow \infty$, hvis

$$(1.2) \quad f(x) - (ax + b) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \infty \quad (\text{eller } x \rightarrow -\infty)$$

Bemærk, at det er *forskellen* mellem $f(x)$ og en lineær funktion, der skal gå imod nul. Der giver ikke mening at sige at to funktioner nærmer sig til hinanden, hvis de begge går imod uendelig eller minus uendelig.

En *lodret* asymptote, kan kun forekomme i et punkt, hvor $y = f(x)$ *ikke* er defineret. Dette skrives

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow x_0 + \quad \text{eller} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow x_0 - \quad \text{eller} \\ f(x) \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow x_0 + \quad \text{eller} \quad f(x) \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow x_0 - \end{aligned}$$

Som eksempel, skal vi se på grafen for funktionen $f(x) = \frac{x}{x-2}$; $x \neq 2$ (Vist nedenfor)

Som det ses af grafen, "smyger" grafen for $y = f(x)$ sig op ad linien $x = 2$. Endvidere "smyger" grafen sig for store og små x , sig langs med linien $y = 1$. Dette vil man udtrykke (efter at have ført bevis for det).

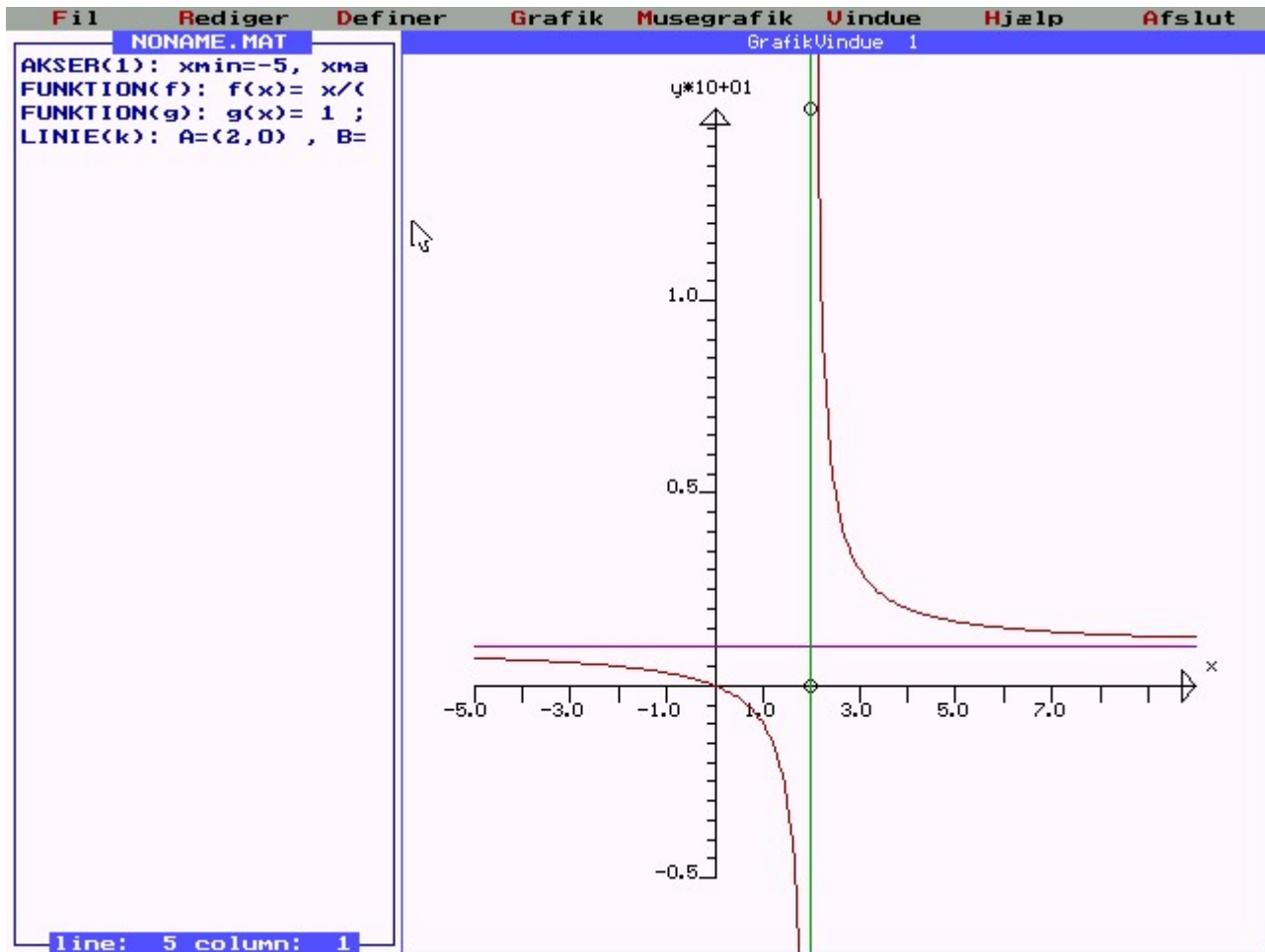
Grafen for $y = f(x)$ har en lodret asymptote med ligning $x = 2$.

Grafen for $y = f(x)$ har en vandret asymptote med ligning $y = 1$ for $x \rightarrow \infty$ eller $x \rightarrow -\infty$

Der findes to fundamentale regler, når vi skal finde grænseværdier for en brøk $\frac{f(x)}{g(x)}$.

(1.3) Hvis $g(x) \rightarrow \infty$ eller $g(x) \rightarrow -\infty$ og $f(x)$ er begrænset (går hverken mod uendelig eller minus uendelig), så går brøken mod 0.

(1.4) Hvis $g(x) \rightarrow 0$, og $f(x)$ ikke går imod 0, så går brøken mod uendelig eller minus uendelig.



Ved at anvende disse to regler, kan vi se at:

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow 2+ \text{ (fra højre)}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow 2- \text{ (fra venstre)}$$

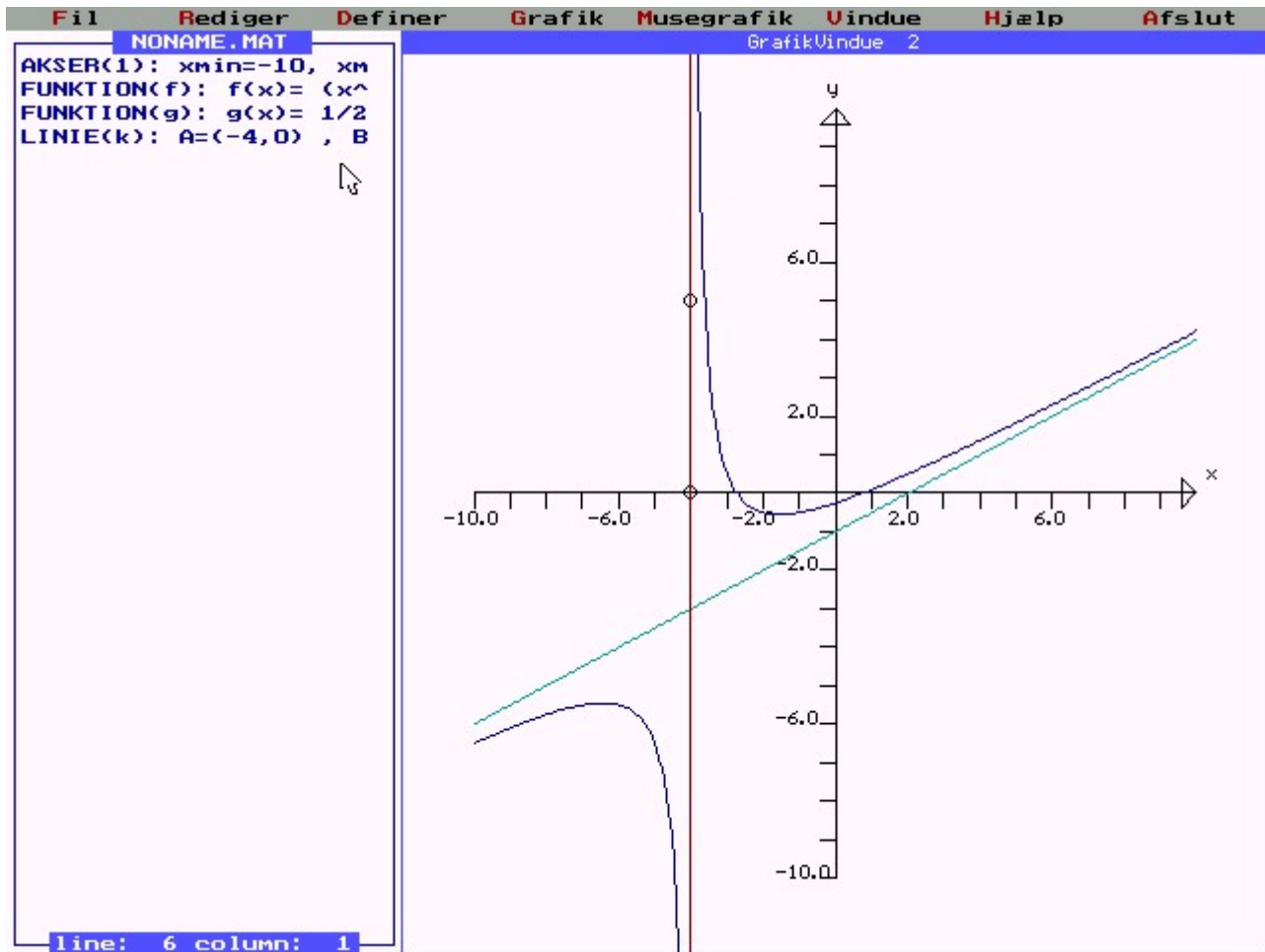
Hvoraf vi slutter, at (grafen for) $y = f(x)$ har en lodret asymptote med ligning $x = 2$.

For den vandrette asymptote laver vi opskrivningen, idet vi dividerer med x i tæller og nævner

$$f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} \rightarrow \frac{1}{1-0} = 1 \text{ for } x \rightarrow \pm\infty$$

Hvor vi slutter, at $y = f(x)$ har en vandret asymptote med ligning $y = 1$ for $x \rightarrow \pm\infty$

Vi vil nu se på et eksempel på en funktion, der har en lodret og en skrå asymptote.



Ovenfor er vist grafen for funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2x + 8}$; $x \neq -4$

Tælleren er for $x = -4$ lig med 6, så -4 er ikke et nulpunkt for tælleren. Heraf følger det:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2x + 8} \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow -4+$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2x + 8} \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow -4-$$

Hvoraf vi slutter, at grafen for $y = f(x)$ har en lodret asymptote med ligning $x = -4$.

Grafen indikerer, at funktionen også har en skrå asymptote. For at bestemme denne, foretager vi polynomiums division. Vi viser ikke udregningen, men vi får kvotienten $\frac{1}{2}x - 1$ og resten 6. Følgelig er:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2x + 8} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{6}{2x + 8}$$

Vi laver derefter den simple omskrivning:

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \frac{6}{2x+8} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \pm\infty$$

Forskellen mellem $f(x)$ og den lineære funktion $y = \frac{1}{2}x - 1$ går imod 0 for x gående mod plus eller minus uendelig, af hvilket vi slutter: Grafen for $y = f(x)$ har en skrå asymptote

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ for } x \rightarrow \pm\infty$$

2. Polynomier og polynomiumsbrøker for $x \rightarrow \pm\infty$

Vi vil først vise, at et polynomium af grad > 0 vil gå imod ∞ eller $-\infty$ kun afhængigt af fortegnet for højstegradsleddet. Lad

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{med } n \geq 1$$

Hvis vi sætter x^n uden for en parentes, får vi følgende omskrivning;

$$(2.1) \quad f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \quad \text{med } n \geq 1$$

Hvis $x \rightarrow \pm\infty$, vil fortegnet for det der står inde i parentesen være det samme, som fortegnet for a_n , idet alle de øvrige led vil gå imod nul. Polynomiet vil derfor "opføre sig som" $a_n x^n$ for $x \rightarrow \pm\infty$.

Vi ser da på en polynomiumsbrøk, hvor graden af tælleren er større en graden af nævneren

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \text{med } n \geq m$$

Vi dividerer da i tæller og nævner med $b_m x^m$. Hermed får vi

$$(2.2) \quad f(x) = \frac{\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a_{n-1}}{b_m} x^{n-m-1} + \dots + \frac{a_1}{b_m} x^{1-m} + \frac{a_0}{b_m} x^{-m}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} x^{-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} x^{-m+1} + \frac{b_0}{b_m} x^{-m}} \quad \text{med } n > m$$

Nævneren vil gå imod 1 for $x \rightarrow \pm\infty$, og tælleren vil "opføre sig som" $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ for $x \rightarrow \pm\infty$.

Hvis specielt tællerens grad er en større ens nævnerens grad, vil polynomiumsbrøken opføre sig som et førstegradspolynomium (en lineær funktion), hvilket betyder, at polynomiumsbrøken vil have en skrå asymptote. Det var netop det, som var tilfældet med det andet af de indledende eksempler.

Hvis nævnerens grad er lig med tællerens grad, altså hvis $n = m$, er polynomiumsbrøken:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots b_1 x + b_0}$$

Vi dividerer brøken i tæller og nævner med x^n og får:

$$f(x) = \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \dots b_1 x^{-n+1} + b_0 x^{-n}} \rightarrow \frac{a_n + 0 + \dots 0 + 0}{b_n + 0 + \dots 0 + 0} = \frac{a_n}{b_n} \text{ for } x \rightarrow \pm\infty$$

$f(x)$ går altså imod en konstant, hvilket betyder, at $f(x)$ har en vandret asymptote

$$(2.3) \quad y = \frac{a_n}{b_n} \text{ for } x \rightarrow \pm\infty$$

Hvis nævnerens grad er større end tællerens grad, altså hvis $m > n$, foretager vi den samme omskrivning som i (2.2)

$$f(x) = \frac{\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a_{n-1}}{b_m} x^{n-m-1} + \dots \frac{a_1}{b_m} x^{1-m} + \frac{a_0}{b_m} x^{-m}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} x^{-1} + \dots \frac{b_1}{b_m} x^{-m+1} + \frac{b_0}{b_m} x^{-m}} \quad \text{med } n < m$$

Når $n < m$ er alle eksponenterne negative i udtrykket ovenfor. Dette betyder igen at alle leddene vil gå imod 0 for $x \rightarrow \pm\infty$. Vi slutter derfor.

Hvis nævnerens grad er større end tællerens grad $m > n$, har polynomiumsbrøken en vandret asymptote

$$y = 0 \text{ for } x \rightarrow \pm\infty.$$

Dette var netop tilfældet i det første af de indledende eksempler.

Kap 5. Numerisk løsning

1. ligninger

Der er mange ligninger, der ikke har en analytisk løsning. Hvilket er det samme som, at der ikke findes en løsningsformel. Ligninger af grad > 2 , kan principielt løses, men der er ingen kendt løsningsformel for ligninger af grad > 4 . I gymnasiet lærer man som bekendt kun løsningsformler for førstegrads-ligninger og andengrads-ligninger.

I matematikken taler man om *trancendente* tal. Hvilket betyder tal, som ikke er rod i et polynomium med heltallige (eller rationale) koefficienter. Som eksempler på trancendente tal er π og e , hvorimod f.eks. $\sqrt{3}$ er et irrationalt tal (dvs. ikke en brøk), men ikke et tracentent tal, idet $\sqrt{3}$ er rod i polynomiet x^2-3 .

Trancendente funktioner er f.eks. $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$ og e^x .

En *rational funktion* er et polynomium eller en polynomiumsbrøk med heltallige (eller rationale) koefficienter.

Til ligninger, der principielt ikke kan løses analytisk hører de trancendente ligninger. Hvilket vil sige ligninger, der både indeholder en rational funktion og en tracentent funktion.

1.1 Eksempel

En simpel tracentent ligning kunne f.eks. være $e^x = x + 2$.

De fleste moderne grafregnere, har en metode til at løse sådanne ligninger, og hvis man forsøger finder man $x = 1,1462$

1.1 Bisektion

Bisektion, betyder at halvere, og det er også metoden til numerisk nulpunktsbestemmelse.

Lad os antage at man har en kontinuert funktion $y = f(x)$ i et interval $[a, b]$ og der gælder $f(a) \cdot f(b) < 0$, således at $f(a)$ og $f(b)$ har forskelligt fortegn. Så må $f(x) = 0$ i mindst et punkt mellem a og b .

Vi antager at $f(a) < 0$ Man udregner nu funktionsværdien i midtpunktet af $[a, b]$ $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

Hvis $f(m) = 0$, har man fundet nulpunktet ellers, hvis $f(m) > 0$ ligger der et nulpunkt i intervallet $[a, m]$ ellers ligger der et nulpunkt i intervallet $[m, b]$. Herefter gentager man processen med det nye interval, og sådan fortsætter man, indtil man har lokaliseret nulpunktet tilstrækkeligt nøjagtigt.

Efter 10 halveringer (iterationer), er nulpunktet bestemt med en nøjagtighed på $(b-a)/2^{10}$.

Bisektion er let at anvende på en computer, men er relativ langsom, at anvende manuelt.

1.2 Regulæ falsi

Forudsætningerne er de samme som for bisektion, men ideen er den at man tilnærmer funktionen med en lineær funktion i intervallet $[a, b]$ og bestemmer den lineære funktions skæringspunkt med 1. aksens. Den lineære funktion, som går gennem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

I denne ligning sætter vi $y = 0$ og finder første tilnærmelse til skæringspunktet:

$$x = m = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

På samme måde som før, hvis $f(m) = 0$, har man fundet nulpunktet ellers, hvis $f(m) > 0$ ligger der et nulpunkt i intervallet

$[a, m]$ ellers ligger der et nulpunkt i intervallet $[m, b]$. Her efter gentager man processen med det nye interval, og sådan fortsætter man, indtil man har lokaliseret nulpunktet tilstrækkeligt nøjagtigt.

Regulae falsi konvergerer langt hurtigere en bisektion, og denne metode anvendes af mange computere og grafregnere. Man standser i reglen, når man har fundet to værdier, hvis afstand er mindre end den ønskede nøjagtighed.

1.3 Newton Raphsons metode

Denne metode er meget elegant, men kræver kendskab til funktionens differentialkvotient. Den kræver ikke, at man kender funktionen i to værdier, hvor $f(a) \cdot f(b) < 0$, men den kræver at man har et gæt x_0 , der ikke ligger "alt for langt fra" nulpunktet. Ideen er simpel.

Man tilnærmer funktionen med det *approximerende* 1. grads *polynomium* (tangentialigningen), og finder nulpunktet for denne som en tilnærmelse til nulpunktet for f .

Man giver x_0 en tilvækst h , og bestemmer h , således at man rammer nulpunktet i denne approximation

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0 \Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Man sætter så $x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Hvis $f(x_1) = 0$, er nulpunktet fundet, eller gentager man processen for at bestemme et h_1 .

$$f(x_1 + h_1) = f(x_1) + f'(x_1)h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Man sætter så $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, og sådan fortsættes, indtil man har opnået en tilstrækkelig nøjagtighed.

Newton Raphsons metode konvergerer hurtigt, når blot man er i nærheden af nulpunktet, og $f'(x_0)$ er forskellig fra 0 i x_0 . Eller man ikke kommer i nærheden af et nulpunkt for $f'(x)$. I dette tilfælde kan man blive kylet endog meget langt væk fra nulpunktet.

Kap 6. Funktionsundersøgelse

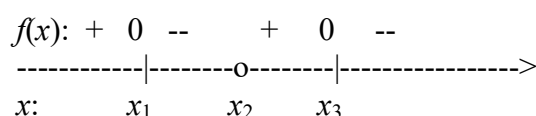
1. Undersøg og tegn

Før indførelsen af grafregneren i gymnasiet omfattede en funktionsundersøgelse *alle* følgende nedenstående punkter. Hvad angår det sidste punkt om tegning af grafen, så er det tilsyneladende ikke længere noget krav, at man selv skal kunne tegne funktionsgrafen på et stykke kvadreret papir. Det er på sin vis lidt underligt, alt den stund, at alle de øvrige punkter netop er forudsætningen for dette.

Vi antager, at der er forelagt en funktion $y = f(x)$. Opgaven kan lyde:

Undersøg $f(x)$, med henblik på nogle (måske alle) af nedenstående punkter.

1. Definitionsmængde $Dm(f)$.
2. Nulpunkter og fortegn for $f(x)$. Dette indebærer, at løse ligningen $f(x) = 0$, og lave en fortegnslinie, som f.eks. skitseret neden for. På fortegnslinien skal afsættes *nulpunkter* og de punkter, hvor $f(x)$ ikke er defineret.



(+) betyder, at $f(x)$ er positiv. (-) betyder, at $f(x)$ er negativ. Man behøver ikke, at skrive i ord, at $f(x)$ er positiv i intervallerne $]-\infty, x_1[$ osv., men man må godt. Bedre, (men det er heller ikke noget krav), at skrive, at da $f(x)$ er kontinuert, kan den ikke skifte fortegn mellem nulpunkter, og punkter, hvor den ikke er defineret.

3. Eventuelle lodrette, vandrette eller skrå asymptoter, samt i øvrigt funktionens opførsel for $x \rightarrow \infty$ og $x \rightarrow -\infty$, hvis disse grænser er i definitionsmængden. Hvis $y = f(x)$ ovenfor har en lodret asymptote i x_2 , så kan man af fortegnsvariationen for f , umiddelbart se, at

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow x_2^- \text{ og } f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow x_2^+$$

4. Monotoniforhold. Dette er beskrevet udførligt i kap 3. Man *skal* her angive de intervaller, hvor f er voksende og hvor f er aftagende (evt. konstant). Hvis man bliver bedt om at angive lokale *max* og *min*, skal man også det.
5. Tegn grafen. Dette *skal* gøres på følgende måde. *Først* tegnes eventuelle asymptoter, for at få overblik over, hvorledes funktionen opfører sig i grænserne. Funktionens maximumspunkter og minimumspunkter, skal være med som *støttepunkter*. Kender man nemlig max og min, samt asymptoterne, er det som regel nemt, at få et overblik over funktionens udseende. Advarsel! Grafregneren kan godt finde på at forbinde to støttepunkter, på hver sin side af et punkt, hvor f ikke er defineret. En sådan graf bygger ikke, på ovenstående punkt 1) til 4), og giver derfor ingen point i bedømmelsen.

6. Værdimængde. $Vm(f)$. For funktioner, der er defineret overalt, kan man umiddelbar aflæse værdimængden af punkt 3) og 4). I andre tilfælde, kan man aflæse værdimængden af grafen, idet man dog skal angive de *udregnede* max og min værdier, ikke værdier som aflæses på grafen.

7.1 Eksempel.

Undersøg og tegn grafen for $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 3x + 9$

1. $Dm(f) = \mathbb{R}$.
2. Nulpunkter og fortegn: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = 0$ (denne ligning er løst på side 45. Gentaget her)

Hvis polynomiet har heltallige rødder, skal de søges blandt divisorerne i 9, som er $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
Ved indsætning ses at $x=1$ er rod. Ved division med $x-1$ fås:

$$\begin{array}{r} \underline{x-1} \quad -3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 \quad \underline{-3x^2 - 12x - 9} \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ -12x^2 + 3x + 9 \\ \underline{-12x^2 + 12x} \\ -9x + 9 \\ \underline{-9x + 9} \\ 0 \end{array}$$

Ifølge divisionsligningen er

$$-3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = (x-1)(-3x^2 - 12x - 9)$$

Og den oprindelig ligning er derfor ifølge nulreglen ensbetydende med

$$x-1=0 \vee -3x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \vee x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1 \vee x=-1 \vee x=-3}$$

$$f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = -3(x-1)(x+1)(x+3)$$

Af denne faktorisering for f , er det relativt nemt, at bestemme fortegnsvariationen for f . Eller man kan blot udregne en funktionsværdi mellem nulpunkterne, og se om den er positiv eller negativ.

$$\begin{array}{ccccccc} f(x): & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline & & -3 & & -1 & & 1 & \\ x: & & & & & & & \end{array} \rightarrow$$

3. Asymptoter. Grafen for f har ingen asymptoter, men $f(x) \rightarrow -\infty$ for $x \rightarrow \infty$ og $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow -\infty$
4. Monotoniforhold. Vi udregner $f'(x) = -9x^2 - 18x + 3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -9x^2 - 18x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$$

$$x \approx 2,155 \vee x = -0,155$$

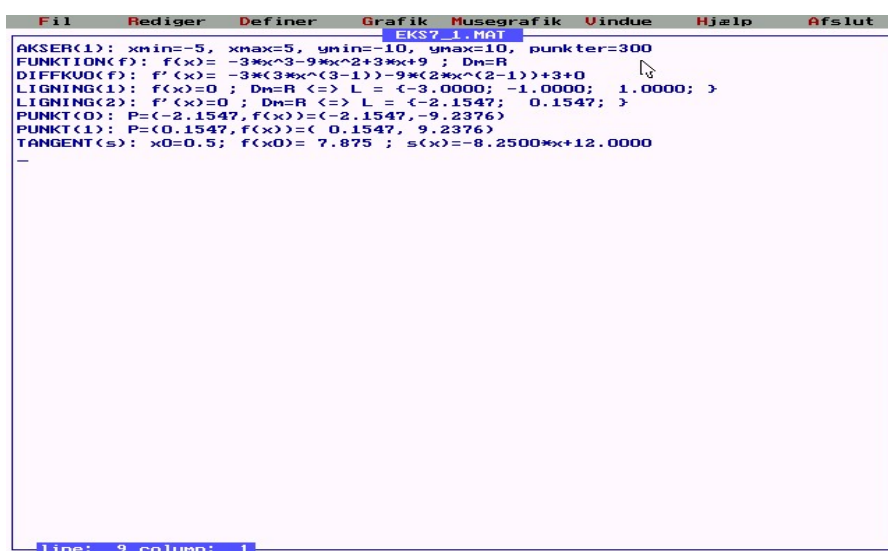
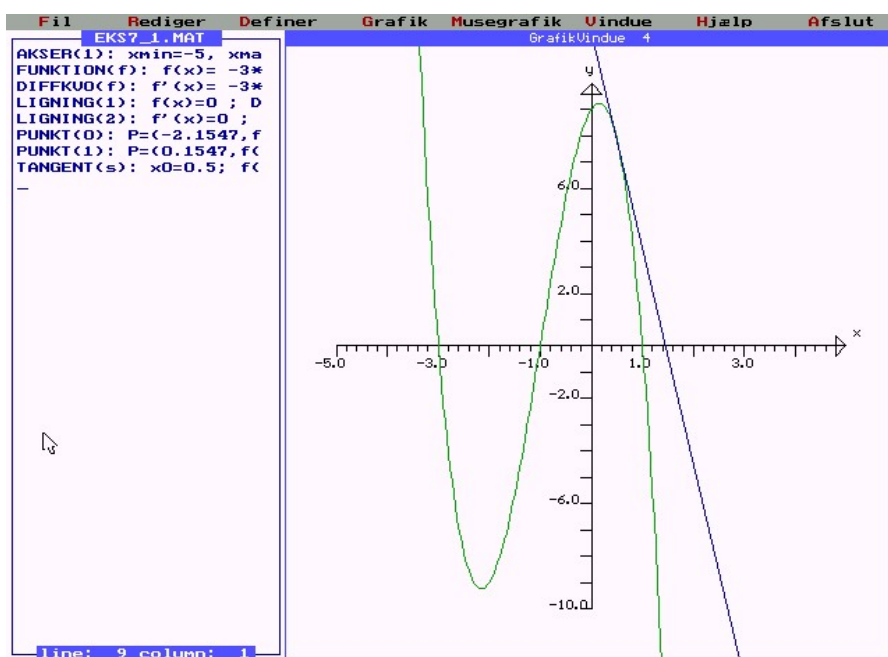
Fortegnsvariationen for $f'(x)$, kan lettest bestemmes ved at bemærke, at $f'(x)$ er et andengradspolynomium, der vender grenene nedad.

$$\begin{array}{ccccccc} f'(x): & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline & & -0,155 & & 2,155 & & \\ x: & & & & & & \end{array} \rightarrow$$

Af fortegnsvariationen for f' , ses at:

f er voksende i intervallet $\left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right]$
 f er aftagende i intervallerne $\left] -\infty, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right]$ og $\left[\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \infty \right]$
 f har lokalt min i $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$ og f har lokalt max i $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

Nedenfor er $f(x)$ undersøgt og tegnet med et matematikprogram. $f(x) = 0$ er løst. $f'(x)$ er udregnet analytisk, og $f'(x) = 0$ er løst. De lokale max og min er fundet. Endelig er fundet tangentligningen i $x = 0,5$.



7.2 Eksempel

Undersøg og tegn grafen for $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 7}{2x - 3}$

1. $\text{Dm}(f) = \{x \mid 2x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}.$

2. Nulpunkter og fortegn. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4} \Leftrightarrow x \approx -2,77 \vee x \approx 1,27$

Fortegnsvariationen, kan altid findes ved at udregne en værdi af $f(x)$ og afgøre om $f(x) > 0$ eller $f(x) < 0$, men man kan også konstatere, at tælleren er et andengradspolynomium, hvor grenene vender opad, så det er negativt mellem rødderne og ellers positivt. Endvidere er nævneren negativ for $x < \frac{3}{2}$ og positiv for $x > \frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{ccccccc} f(x): & - & 0 & + & & 0 & - & & + \\ \hline & & -2,77 & & & 1,27 & & \frac{3}{2} & \end{array} \rightarrow$$

3. Asymptoter. Da $\frac{3}{2}$ er et nulpunkt for nævneren, som ikke også er et nulpunkt for tælleren, går $f(x)$ mod uendelig eller minus uendelig for x gående imod $\frac{3}{2}$. Af fortegnsvariationen ses imidlertid.

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow \frac{3}{2}^- \quad \text{og} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow \frac{3}{2}^+$$

Grafen for $y = f(x)$ har en lodret asymptote med ligning $x = \frac{3}{2}$.

For at undersøge skrå asymptoter, foretager vi polynomiers division.

$$\begin{array}{r} 2x-3 \overline{) 2x^2 + 3x - 7} \quad |x+3 \\ \underline{2x^2 - 3x} \\ 6x - 7 \\ \underline{6x - 9} \\ 2 \end{array}$$

Af divisionsligningen følger: $f(x) = x + 3 + \frac{2}{2x-3} \Leftrightarrow f(x) - (x+3) = \frac{2}{2x-3} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow \pm \infty$

Grafen for f har en skrå asymptote for $x \rightarrow \pm \infty$ med ligning $y = x + 3$.

4. Monotoniforhold:

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(2x-3) - (2x^2+3x-7)2}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x + 5}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f'(x): & + & 0 & - & & - & 0 & + \\ \hline & & 0,5 & & & 1,5 & & 2,5 \end{array} \rightarrow$$

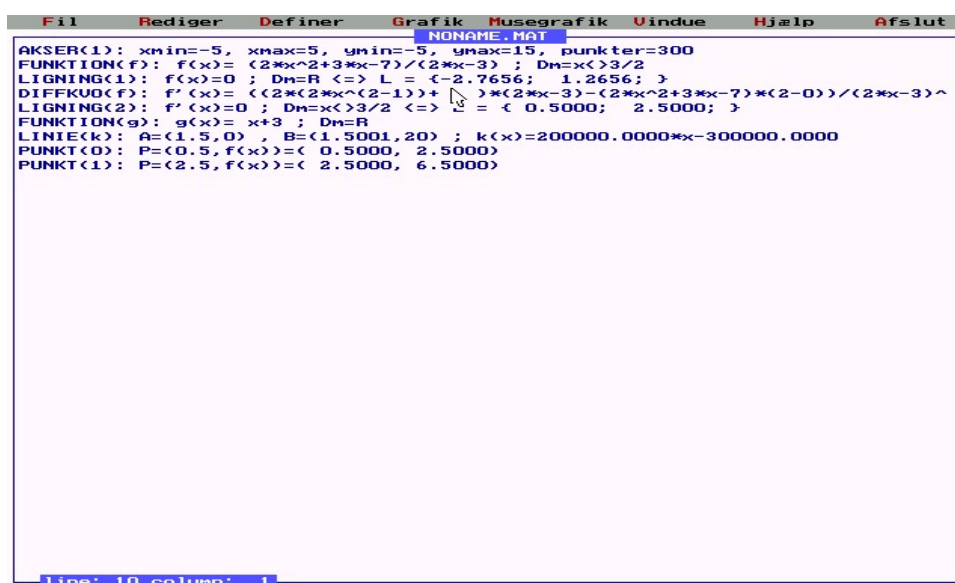
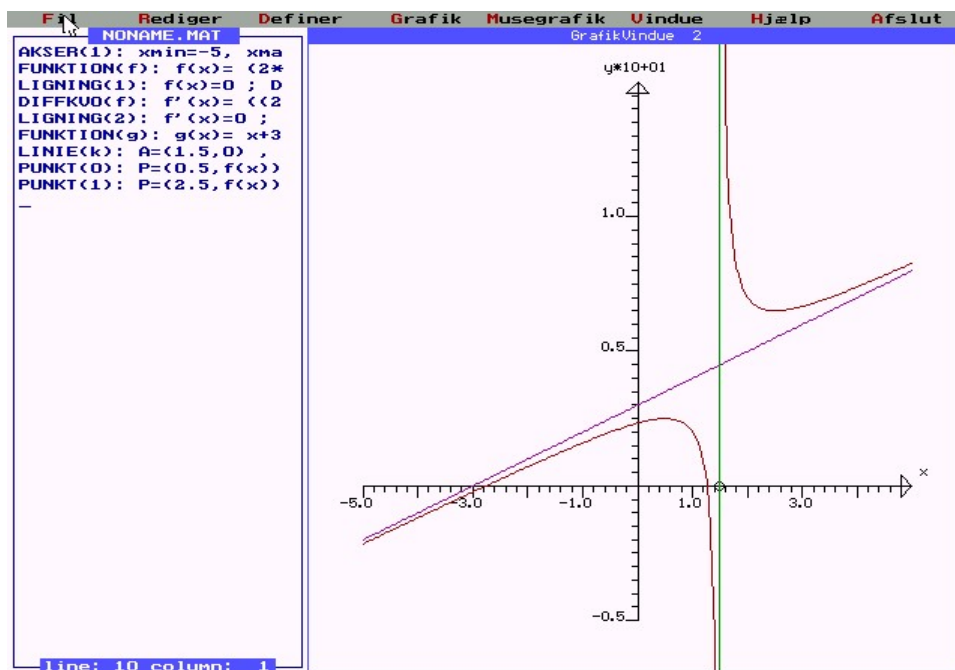
Af fortegnsvariationen for $f'(x)$ ses, at

$f(x)$ er voksende i intervallerne $]-\infty; 0,5]$ og $[2,5; \infty[$

$f(x)$ er aftagende i intervallerne $[0,5; 1,5[$ og $]1,5; 2,5]$

$f(x)$ har lokalt max i 0,5. $f(0,5) = 2,5$. $f(x)$ har lokalt min i 2,5. $f(2,5) = 6,5$

Af fortegnsvariationen ses, at funktionen ikke antager nogen værdier i intervallet $]2,5; 6,5[$. Dette ses også lettest af grafen. Værdimængden for f er derfor: $\text{Vm}(f) = \mathbb{R} \setminus]2,5; 6,5[=]-\infty; 2,5] \cup [6,5; \infty[$.



7.3 Eksempel

Vi vil undersøge funktionen $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}$ i intervallet $[0, \pi]$. Dette er nemlig et periodeinterval for funktionen, idet $\sin 2x$ er periodisk med perioden π , og $\cos(x + \pi) = -\cos x$, så $\cos^2 x$ er uforandret

- Da $1 + \cos^2 x > 0$ for alle x , er $f(x)$ defineret i hele periodeintervallet.
- Nulpunkter og fortegn: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x = \pi \vee 2x = 2\pi \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$

$f(x)$:	0	+	0	-	0
	----- ----- ----- ----->				
x :	0		$\frac{\pi}{2}$		π

- Grafen har ingen asymptoter

4. Monotoniforhold.

$$f'(x) = \frac{2 \cos 2x (1 + \cos^2 x) - \sin 2x (2 \cos x (-\sin x))}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{2(2 \cos^2 x - 1)(1 + \cos^2 x) - 4 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6 \cos^2 x - 2}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{6(\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}})(\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}})}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 0,9552 \vee x = 2,1864$$

$$\begin{array}{ccccccc} f'(x): & & + & & 0 & & - & & 0 & & + \\ \hline x: & 0 & & 0,96 & & 2,19 & & \pi \end{array} \quad \text{Af fortegnsvariationen for } f'(x) \text{ ses}$$

f er voksende i intervallerne $[0; 0,9592]$ og $[2,1864; \pi]$

f er aftagende i intervallet $[0,9592; 2,1864]$

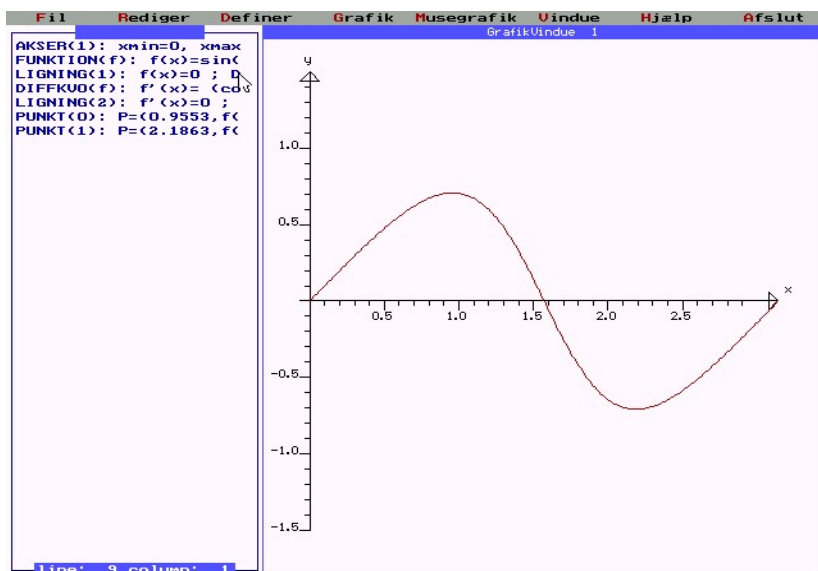
f har lokalt max i 0,95552 og lokalt min i 2,1864. Vi vil forsøge at beregne funktionens max og min eksakt.

$$\text{i det } \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \text{ i } [0, \pi] \text{ , s\aa } \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} \text{ , herved f\aa s de to ekstremumpunkter } x_1 \text{ og } x_2.$$

$$f(x_1) = \frac{2 \sin x_1 \cos x_1}{1 + \cos^2 x_1} = \frac{2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{and} \quad f(x_2) = \frac{2 \sin x_2 \cos x_2}{1 + \cos^2 x_2} = \frac{2 \sqrt{\frac{2}{3}} (-\sqrt{\frac{1}{3}})}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Da } f(0) = f(\pi) = 0 \text{ er funktionens v\ae rdim\ae ngde } \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$



```

Fil Rediger Definer Grafik Musegrafik Uindue Hjælp Afslut
NONAME.MAT
AKSER(1): xmin=-0, xmax=pi, ymin=-1.5, ymax=1.5, punkter=300
FUNKTION(f): f(x)= sin(2*x)/(1+cos(x)^2) ; Dm=0<=x<=pi
DIFFKUO(f): f'(x)= (cos(2*x)*(2)*(1+cos(x)^2)-sin(2*x)*(0+2*cos(x)^(2-1))*(-si
LIGNING(1): f(x)=0 ; Dm=R <=> L = { 0.0000; 1.5708; 3.1416; }
LIGNING(2): f'(x)=0 ; Dm=R <=> L = { 0.9553; 2.1863; }
PUNKT(0): P=(0.9553,f(x))=( 0.9553, 0.7071)
PUNKT(1): P=(2.1863,f(x))=( 2.1863,-0.7071)
line: 8 column: 1

```

7.4 Eksempel

Vi vil undersøge funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$

2 Nulpunkter og fortegn $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\begin{array}{c}
 f(x): \quad \quad - \quad 0 \quad + \\
 \hline
 \text{-----} 0 \text{-----} | \text{-----} > \\
 x: \quad \quad 0 \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

3. Asymptoter.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty \text{ for } x \rightarrow 0+ \quad \text{og} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0+ \text{ for } x \rightarrow \infty$$

Grafen for $y = f(x)$ har en lodret asymptote med ligning $x = 0$ og en vandret asymptote med ligning $y = 0$

5. Monotoniforhold

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\begin{array}{c}
 f'(x): \quad \quad + \quad 0 \quad - \\
 \hline
 \text{-----} 0 \text{-----} | \text{-----} > \\
 x: \quad \quad 0 \quad \quad \quad e
 \end{array}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$f(x)$ er voksende i intervallet $]0; e]$ og aftagende i intervallet $[e, \infty[$

Heraf ses at den må have størsteværdi i e . $f(e) = \frac{1}{e}$. Følgelig er værdimængden $\left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$

