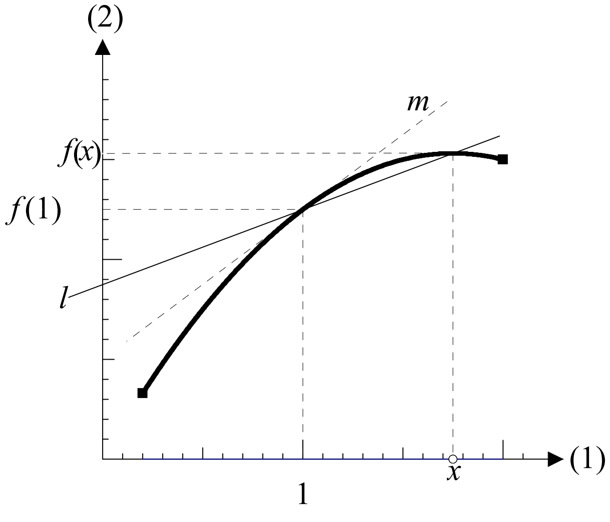
Differential-regning

3. del



2006 Karsten Juul

Indhold

Differentialregning 3. del

1. udgave 2006

© 2006 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

10. Tretrinsreglen

10.01 Definition af differentialkvotient

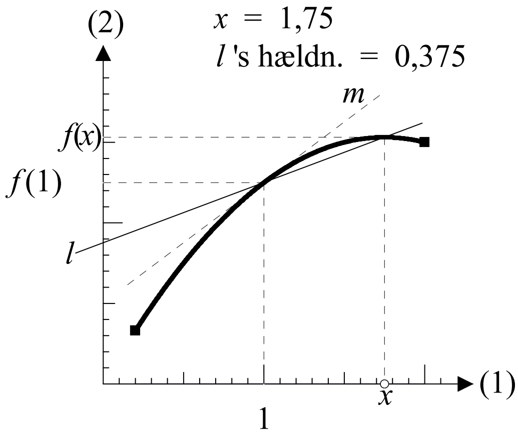
Oplæg

Figur 10a viser en interaktiv figur med grafen for funktionen

$(*) \quad f(x) = 1{,}75x - 0{,}5x^2$.

Linjen m er tangent til grafen for $f(x)$ i grafpunktet med førstekoordinat 1.

Linjen l går gennem grafpunkterne med førstekoordinater 1 og x. Man kan trække det hvide punkt frem og tilbage på førsteaksen og derved ændre tallet x.

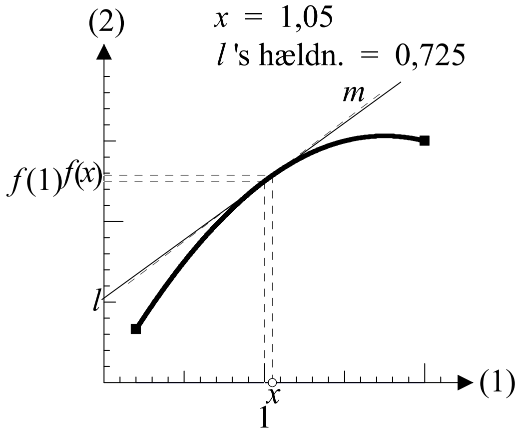


Figur 10a

l går gennem punkterne $(x_1, y_1) = (1, f(1))$ og $(x_2, y_2) = (1{,}75, f(1{,}75))$ så l's hældningskoefficient er

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(1{,}75) - f(1)}{1{,}75 - 1} = 0{,}375$$

hvilket er lig tallet på figur 10a .



Figur 10b

På figur 10b er x så nær 1 at l's hældningskoefficient er næsten den samme som hældningskoefficienten for tangenten m. Tangenthældningen $f'(1)$ er grænseværdien af l's hældningskoefficient når x går mod 1.

(10c) Definition

Ved

differentialkvotienten $f'(x_0)$ af en funktion $f(x)$ i et tal x_0

forstås

grænseværdien for x gående mod x_0 af hældningskoefficienten for linjen gennem grafpunkterne med førstekoordinater x_0 og x.

Med symboler kan denne definition skrives sådan:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

10.02 Øvelse

(a) På figur 10a skærer l grafen i to punkter. Beregn andenkoordinaten til hvert af disse punkter.

(b) Beregn hældningskoefficienten for linjen l på figur 10b .

(c) I tidligere afsnit har du (uden bevis) fået oplyst nogle formler der kan bruges til at beregne differentialkvotienter. Brug disse til at beregne hældningskoefficienten for tangenten m i ramme 10.01 .

10.03 Tretrinsreglen

Oplæg

Vi vil bruge definition 10c til at beregne hældningskoefficienten $f'(1)$ for tangenten m i ramme 10.01. Dette gør vi i tre trin:

(1) Grafpunkterne med førstekoordinater 1 og x har andenkoordinater 1,25 og $1{,}75x - 0{,}5x^2$. Linjen l gennem disse to punkter har derfor hældningskoefficienten

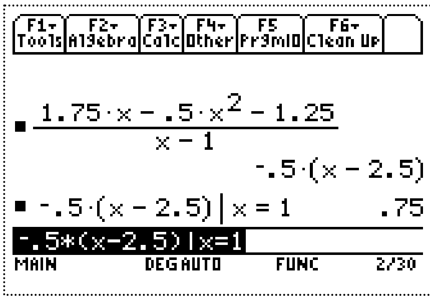
$$\frac{(1{,}75x - 0{,}5x^2) - 1{,}25}{x-1} .$$

(2) Vi får lommeregneren til at reducere dette udtryk (se figur 10d) og får at det er lig

$$-0{,}5 \cdot (x - 2{,}5) .$$

(3) Med metoden fra ramme 9.13 får vi at for x gående mod 1 er grænseværdien af l's hældningskoefficient lig

$$-0{,}5 \cdot (1 - 2{,}5) \; = \; 0{,}75 .$$



Figur 10d

Hældningskoefficienten $f'(1)$ for tangenten m er altså 0,75 .

(10e) Metode (tretrinsreglen)

Differentialkvotienten $f'(x_0)$ for en funktion $f(x)$ i et tal x_0 kan bestemmes ved at gennemføre følgende tre trin:

(1) Opskriv udtrykket for hældningskoefficienten for linjen gennem f-grafens punkter med førstekoordinater x_0 og x .

(2) Omskriv udtrykket fra (1) så man kan bestemme dets grænseværdi for x gående mod x_0 .

(3) Bestem denne grænseværdi.

Denne grænseværdi er $f'(x_0)$.

10.04 Øvelse

Gennemfør det der er beskrevet i oplægget i ramme 10.03 .

10.05 Kontinuerte funktioner

(10f) Regel

Et regneudtryk med en variabel x som er opbygget af de "sædvanlige" symboler, er kontinuert i enhver værdi af x hvori udtrykket er defineret.

Eksempel

Da

$$\frac{2\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} = \frac{2}{x}$$

er

$$\lim_{x\to 3}\frac{2\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} = \frac{2}{3}$$

ifølge metoden fra ramme 9.13.

For ifølge denne metode er grænseværdien lig værdien af $\frac{2}{x}$ for $x=3$, da $\frac{2}{x}$ er kontinuert i 3.

10.06 Øvelse

(a) Bestem grænseværdien af $\frac{8x}{x\cdot(x+1)}$ for x gående mod 0.

(b) Bestem $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)\cdot 2x}$.

(c) Bestem $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-2x}$.

10.07 Øvelse

Brug tretrinsreglen (10e) til at bestemme differentialkvotienten i 4 af $\frac{1}{x}$. Husk at du evt. kan lade lommeregneren foretage reduktionen i trin (2).

10.08 Øvelse

Brug tretrinsreglen (10e) til at bestemme differentialkvotienten i x_0 af $\frac{1}{x}$.

10.09 Øvelse

Brug tretrinsreglen (10e) til at bestemme differentialkvotienten $f'(x_0)$ for funktionen $f(x) = x^3$.

10.10 Differentiable funktioner

Oplæg

Vi vil forsøge at bestemme differentialkvotienten for $f(x) = \sqrt{x^2}$ i 0 ved hjælp af tretrinsreglen:

(1) Hældningskoefficienten for linjen gennem *f*-grafens punkter med førstekoordinater x_0 og x er

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{x_0^{\,2}}}{x-x_0}.$$

(2) Vi lader lommeregneren reducere dette udtryk for hældningskoefficienten. Vi får at vide at hældningskoefficienten er lig $\operatorname{sign}(x)$, dvs. den er -1 når x er negativ, og 1 når x er positiv.

(3) Da hældningskoefficienten er -1 når x er negativ, og 1 når x er positiv, har den ikke nogen grænseværdi for x gående mod 0.

Altså har $f(x) = \sqrt{x^2}$ ikke en differentialkvotient i 0.

(10g) Definition af differentiabel funktion

Man siger at

en funktion $f(x)$ er differentiabel i et tal x_0

hvis

hældningskoefficienten $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ for linjen gennem grafpunkterne med førstekoordinater x_0 og x har en grænseværdi for x gående mod x_0.

10.11 Øvelse

(a) Forsøg at bestemme differentialkvotienten for $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i 0 ved hjælp af tretrinsreglen.

(b) Hvorfor har hældningskoefficienten $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ikke en grænseværdi for x gående mod 0?

10.12 Hvis differentiabel, så kontinuert

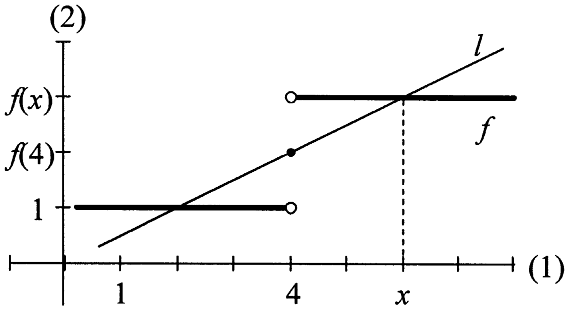
Oplæg

På figur 10h er tegnet grafen for en funktion $f(x)$ som ikke er kontinuert i 4 .
Desuden er tegnet linjen l gennem grafpunkterne med førstekoordinater 4 og x .

Det ses at hældningskoefficienten

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

for l kan vi gøre så stor det skal være ved at vælge x tæt nok på 4 . Altså har $(*)$ ikke nogen grænseværdi for x gående mod 4 , så $f(x)$ er ikke differentiabel i 4 .



Figur 10h

Hvis vi tegner grafen for en anden funktion $f(x)$ der ikke er kontinuert i et tal x_0 , kan vi på lignende måde indse at funktionen heller ikke er differentiabel i tallet. Der gælder:

> Hvis $f(x)$ ikke er kontinuert i x_0 ,
> så kan $f(x)$ heller ikke være differentiabel i x_0 .

Dette er udtrykt i følgende sætning:

(10i) Sætning

Når $f(x)$ er en funktion, og x_0 er et tal, gælder

> Hvis $f(x)$ er differentiabel i x_0 ,
> så er $f(x)$ kontinuert i x_0 .

10.13 Øvelse

Vedr. figur 10h .

(a) Bestem hældningskoefficienten $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ for l når x er 4,5 og når x er 4,1 .

(b) Hvor tæt skal x være på 4 for at $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ er over 1000 ?

11. Formler for differentialkvotienter

11.01 Differentialkvotient for x^2

(11a) Sætning

Når $f(x) = x^2$, gælder for ethvert tal x_0 at

$(*)$ $f(x)$ er differentiabel i x_0

og

$(**)$ $f'(x_0) = 2x_0$.

Bevis

For ethvert tal $x \neq x_0$ gælder at linjen gennem grafpunkterne med førstekoordinater x_0 og x har hældningskoefficienten

$$\frac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

Da $x + x_0$ er kontinuert i x_0, har hældningskoefficienten en grænseværdi for x gående mod x_0 (ifølge metoden fra ramme 9.13). Altså er $(*)$ bevist.

Grænseværdien er værdien af $x + x_0$ for $x = x_0$, dvs.

$$x_0 + x_0 = 2x_0 \; .$$

Altså er $(**)$ bevist.

11.02 Øvelse (Uden hjælpemidler)

(a) Udregn $(x - x_0)(x^2 + x_0 \cdot x + x_0{}^2)$.

(b) Sætningen og beviset i ramme 11.01 drejer sig om x^2. Skriv en tilsvarende sætning med bevis der drejer sig om x^3. Brug svaret på (a) når du skal reducere udtrykket for hældningskoefficienten.

11.03 Differentialkvotient for x^a

(11b) Sætning

For ethvert reelt tal a gælder:

Hvis $f(x) = x^a$ så er $f'(x) = ax^{a-1}$.

Eksempel

Hvis $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ fås af sætning (11b) at

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Eksempel

Vi vil finde differentialkvotienten for $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Da $f(x) = x^{-2}$ fås

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2\frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3} .$$

Eksempel

Vi vil finde differentialkvotienten af $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Da $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ fås

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

11.04 Øvelse

Brug (11b) til at bestemme differentialkvotienterne for følgende funktioner:

$$f(x) = x^{1,6} \ , \quad g(x) = \frac{1}{x^{1,6}} \quad \text{og} \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

11.05 Differentialkvotienten af $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$

(11c) Sætning

Hvis $f(x)=\frac{1}{x}$ så er $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Bevis

Da $\frac{1}{x} = x^{-1}$ kan vi bruge reglen for differentialkvotient af potens (regel 11b):

$$f'(x) = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^{-2}}$$

hvilket skulle bevises.

(11d) Sætning

Hvis $f(x)=\sqrt{x}$ så er $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Bevis

Da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kan vi bruge reglen for differentialkvotient af potens (regel 11b):

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

hvilket skulle bevises.

11.06 Oversigt over differentialkvotienter

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^a	$a\cdot x^{a-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x\cdot\ln a$
e^x	e^x
e^{kx}	$k\cdot\mathrm{e}^{kx}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

12. Regneregler for differentialkvotienter

12.01 Differentialkvotient af $f+g$

(12a) Sætning om differentialkvotient af sum

Hvis

(1) to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i et tal x_0

gælder:

(2) Summen $h(x) = f(x) + g(x)$ er differentiabel i x_0 , og

(3) $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Bevis

Linjen gennem *h*-grafens punkter med førstekoordinater x_0 og x har hældningskoefficienten

(4) $$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$\frac{f(x)-f(x_0) \quad + \quad g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

(5) $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} .$$

Ifølge (1) har hvert af leddene i (5) en grænseværdi for x gående mod x_0 . Så må (4) også have dette, dvs. vi har bevist (2).

De to led i (5) har grænseværdierne $f'(x_0)$ og $g'(x_0)$, så udtrykket (5) må have grænseværdien $f'(x_0) + g'(x_0)$. Dette er altså grænseværdien af (4), dvs. vi har bevist (3).

12.02 Øvelse

(a) Brug (12a) og 11.06 til at bestemme differentialkvotienten af hver af følgende:

$$f(x) = \ln x + e^x \ , \quad g(x) = \frac{1}{x} + x^3 \ , \quad p(x) = e^x + 6 \quad \text{og} \quad r(x) = x + e^{2x} .$$

(b) Bestem $h'(1)$ når $h(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

12.03 Øvelse

(a) Gæt ud fra tabellen grænseværdien af $u_1(x)$ for x gående mod 4 .

(b) Gæt ud fra tabellen grænseværdien af $u_2(x)$ for x gående mod 4 .

(c) Udfyld tabellens sidste række.

(d) Gæt ud fra den sidste række grænseværdien af $u_1(x)+u_2(x)$ for x gående mod 4 .

(e) Erstat tallene i tabellen med andre så der når x går mod 4 gælder at summen af grænseværdierne af $u_1(x)$ og $u_2(x)$ er forskellig fra grænseværdien af $u_1(x)+u_2(x)$, eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

x :	3,90	3,95	3,98
$u_1(x)$:	2,05	2,03	2,01
$u_2(x)$:	5,10	5,05	5,02
$u_1(x)+u_2(x)$:			

12.04 Differentialkvotient af $k \cdot f$

(12b) Sætning om differentialkvotient af konstant gange funktion

Hvis

(1) en funktion $f(x)$ er differentiabel i et tal x_0 og k er en konstant

gælder:

(2) Produktet $h(x) = k \cdot f(x)$ er differentiabelt i x_0 , og

(3) $h'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$.

Eksempel

Vi vil bestemme differentialkvotienten af $f(x) = \frac{2}{x}$.

Da $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$ og differentialkvotienten af $\frac{1}{x}$ er $-\frac{1}{x^2}$, fås af (3) i (12b) at

$$f'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} \ .$$

Bemærk

I (3) ovenfor står der k , der står ikke differentialkvotienten af k . Hvis vi i eksemplet skulle have skrevet differentialkvotienten af 2 , var resultatet blevet 0 .

Hvis vi skal finde differentialkvotienten af $g(x) = \frac{1}{x} + 2$, så skal vi derimod skrive differentialkvotienten af 2 , altså 0 . Dette følger af (3) i sætning (12a) . Der gælder altså $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 0 = -\frac{1}{x^2}$.

12.05 Øvelse

I ramme 12.01 beviste vi sætning (12a) ved hjælp af tretrinsreglen. Sætning (12b) kan bevises på lignende måde. Gør det.

12.06 Øvelse

Brug (12a), (12b) og 11.06 til at bestemme differentialkvotienten for hver af følgende funktioner.

$$f(x) = 4 \cdot \ln x \quad , \quad g(x) = 4 + \ln x \quad \text{og} \quad h(x) = \frac{\ln x}{4} \ .$$

12.07 Differentialkvotient af $f-g$

(12c) Sætning om differentialkvotient af differens

Hvis

(1) to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i et tal x_0

gælder:

(2) Differensen $h(x) = f(x) - g(x)$ er differentiabel i x_0 , og

(3) $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

12.08 Øvelse

Sætning (12c) kan bevises ved hjælp af tretrinsreglen på næsten samme måde som sætning (12a) blev bevist, men du skal ikke bevise (12c) på denne måde. Du skal bevise (12c) uden at bruge tretrinsreglen. Det skal du gøre ved at bruge sætningerne (12a) og (12b).

12.09 Øvelse

Brug (12a), (12b), (12c) og 11.06 til at bestemme differentialkvotienten for hver af følgende funktioner.

$$f(x) = x^2 - \ln x \ , \quad g(x) = 2\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \ , \quad h(x) = \frac{4}{x} - 3\ln x \ .$$

12.10 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = x^{-2} + 1$ i punktet $P(1, f(1))$.

12.11 Differentialkvotient af $f \cdot g$

(12d) Sætning om differentialkvotient af produkt

Hvis

(1) to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable i et tal x_0

gælder:

(2) Produktet $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ er differentiabelt i x_0, og

(3) $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Bevis

Linjen gennem h-grafens punkter med førstekoordinater x_0 og x har hældningskoefficienten

I tælleren er tilføjet
$-f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x)$
som er 0.

(4) $$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{\big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

(5) $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} .$$

For x gående mod x_0 gælder:

Grænseværdierne af de to brøker i (5) er hhv. $f'(x_0)$ og $g'(x_0)$ ifølge (1).

Grænseværdien af $g(x)$ er $g(x_0)$ da $g(x)$ er kontinuert ifølge (1).

Grænseværdien af $f(x_0)$ er $f(x_0)$ da $f(x_0)$ er en konstant.

Altså har (4) grænseværdien $f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, dvs. (2) og (3) er bevist.

12.12 Øvelse

Brug (12d) til at bestemme differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:

$f(x) = x \cdot \ln x$ og $g(x) = (x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

13. Differentialkvotient af sammensat funktion

13.01 Øvelse

Der er givet funktionerne $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=x+3$.

(a) Bestem $g(1)$ og $f\big(g(1)\big)$.

(b) Bestem $g(13)$ og $f\big(g(13)\big)$.

(c) Bestem $g(t)$ og $f\big(g(t)\big)$.

13.02 Øvelse

Bestem $f\big(g(x)\big)$ i hvert af følgende tilfælde:

(1) $f(x)=\ln(x)$ og $g(x)=2-x$.

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ og $g(x)=3x+1$.

13.03 Definition af sammensat funktion

(13a) Definition

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være funktioner. Man benytter følgende sprogbrug:

$f\big(g(x)\big)$ er en **sammensat funktion** hvor

$f(x)$ er den **ydre funktion**, og

$g(x)$ er den **indre funktion** .

Eksempler

Hvis $g(3)=2$ og $f(2)=8$, så er $f\big(g(3)\big) = 8$.

Hvis $g(x)=x-1$ og $f(x)=x^3$, så er $f\big(g(x)\big) = (x-1)^3$.

I den sammensatte funktion $(x-1)^3$ er $x-1$ den indre funktion, og x^3 den ydre.
Bemærk at x'et i x^3 ikke er det x der står i $x-1$. Man kunne have brugt forskellige bogstaver for de to x'er .

13.04 Øvelse

Angiv indre og ydre funktion for hver af følgende sammensatte funktioner:

$$f(x) = \left(2+\mathrm{e}^{x}\right)^3 , \quad g(x) = \mathrm{e}^{-0{,}037x} \quad \text{og} \quad h(x) = \ln\left(x^2+1\right) .$$

13.05 Øvelse

På hovedskærmen (den der fås frem ved at taste <u>HOME</u>) kan man (som bekendt) bestemme en differentialkvotient ved hjælp af det blå *d* over 8-tallet. Fx fås differentialkvotienten af x^2 hvis man skriver *d*(x^2,x) og taster <u>ENTER</u> .

(a) Angiv differentialkvotienten for hver af funktionerne

$$e^{x}\,, \quad e^{2x+1}\,, \quad e^{2x+5} \quad \text{og} \quad e^{3x+5}\,.$$

Formuler en regel for at bestemme differentialkvotienter for funktioner af denne type. Kontrollér om reglen også gælder når konstanterne er negative, og når konstanterne ikke er hele tal.

(b) Angiv differentialkvotienten for hver af funktionerne

$$\ln(x)\,, \quad \ln(2x+1)\,, \quad \ln(2x+5)\,, \quad \ln(3x+5)\,.$$

Formuler en regel for at bestemme differentialkvotienter for funktioner af denne type. Kontrollér om reglen også gælder når konstanterne er negative, og når konstanterne ikke er hele tal.

(c) Angiv differentialkvotienten for hver af funktionerne

$$x^4\,, \quad (2x+1)^4\,, \quad (2x+5)^4 \quad \text{og} \quad (3x+5)^4\,.$$

Formuler en regel for at bestemme differentialkvotienter for funktioner af denne type. Kontrollér om reglen også gælder når konstanterne er negative, og når konstanterne ikke er hele tal.

(d) Forestil dig at der i lommeregneren var indbygget to funktioner bip og pip hvor $\text{bip}'(x) = \text{pip}(x)$. Gæt differentialkvotienten af $\text{bip}(ax+b)$ ved at sammenligne med dine svar på (a), (b) og (c).

13.06 Øvelse

I tabellerne er funktionsværdierne afrundet til 1 decimal. Hvis der havde været flere decimaler, ville man kunne se at *f*-grafen og *g*-grafen krummer.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
$g(x)$	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
$f(x)$	0,4	0,7	1	1,3	1,6

x	1,9	2,0	2,1
$h(x) = f(g(x))$			

(a) Angiv skønnede værdier for $g'(2)$ og $f'(3)$.

(b) Udfyld de tomme pladser i $f(g(x))$ -tabellen.

(c) Angiv skønnede værdier for $h'(2)$ og $f'\big(g(2)\big)$.

13.07 Øvelse

(a) Om to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ er oplyst at $f'(5)=4$ og $g'(1)=2$. Skriv tilnærmede værdier for de manglende funktionsværdier i f-tabellen og g-tabellen.

(b) Udfyld den tredje tabel.

x	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$g(x)$			5,0		

x	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$f(x)$			7,0		

x	0,9	1,0	1,1
$h(x)=f(g(x))$			

(c) Angiv en skønnet værdi for $h'(1)$. (d) Udregn $f'\big(g(1)\big)\cdot g'(1)$.

13.08 Oplæg om differentialkvotient af sammensat funktion

For at fremstille en vare skal man taste højden h i mm. Prisen i kr. afhænger af varens bredde b i mm. Vi betragter følgende tre funktioner:

$$br(h) \;=\; \text{bredde når højde er } h \quad , \qquad pr(b) \;=\; \text{pris når bredde er } b \quad ,$$

$$PR(h) \;=\; pr\big(br(h)\big) \;=\; \text{pris når højde er } h \;\; .$$

Når højde er 100 mm, er bredde 90 mm, dvs.

$$br(100)=90 \;\; .$$

Når højde er 100 mm så øges bredde med 2 mm hver gang højde øges 1 mm, dvs.

$$br'(100)=2 \;\; .$$

Når bredde er 90 mm så øges pris med 1,50 kr. hver gang bredde øges 1 mm, dvs.

$$pr'(90)=1{,}50 \;\; .$$

Vi kan slutte at når højde øges 1 mm, så øges pris i kr. med

$(*)$ $\quad 1{,}50\cdot 2=3 \qquad$ dvs. $PR'(100)=3$.

Udregningen $(*)$ kan også skrives

$$pr'(90)\cdot br'(100)=3 \qquad \text{eller} \qquad pr'\big(br(100)\big)\cdot br'(100)=3$$

Vi ser at

$$pr'\big(br(h)\big)\cdot br'(h)=PR'(h) \;\; .$$

13.09 Differentialkvotient af sammensat funktion

(13b) Sætning

Hvis $g(x)$ er differentiabel i x_0 og $f(x)$ er differentiabel i $g(x_0)$, gælder at

funktionen $h(x) = f\big(g(x)\big)$ er differentiabel i x_0

og

$$h'(x_0) \;=\; f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0) \;\;.$$

13.10 Eksemler på brug af sætning 13b

Eksempel 1

Vi vil bestemme differentialkvotienten af

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \;\;.$$

Det ses at

$$f(x) = h\big(g(x)\big) \qquad \text{hvor} \quad h(x) = \ln(x) \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + 1 \;\;.$$

Da

$$h'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{og} \quad g'(x) = 2x$$

er

$$f'(x) \;=\; h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \;=\; \frac{1}{g(x)} \cdot 2x \;=\; \frac{2x}{x^2 + 1} \;\;.$$

Eksempel 2

Vi vil bestemme differentialkvotienten af

$$p(x) \;=\; 4(1-x)^3 + 2 \;\;.$$

Det ses at

$$p(x) = r\big(q(x)\big) \qquad \text{hvor} \quad r(x) = 4x^3 + 2 \quad \text{og} \quad q(x) = 1 - x \;\;.$$

Da

$$r'(x) = 12x^2 \quad \text{og} \quad q'(x) = -1$$

er

$$p'(x) \;=\; r'\big(q(x)\big) \cdot q'(x) \;=\; 12\big(q(x)\big)^2 \cdot (-1) \;=\; -12(1-x)^2 \;\;.$$

13.11 Øvelse

Brug sætning 13b til at bestemme differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:

$$f(x) = \ln(14-3x)\ ,\quad g(x) = (2x^3+x+3)^2\ ,\quad h(x) = 23-\sqrt{2x+4}\ .$$

13.12 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = \left(\frac{x}{3}+2\right)^3$ i punktet $P(-3,\ f(-3))$.

13.13 Oversigt over regneregler for differentialkvotienter

$h(x)$	$h'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)-g(x)$	$f'(x)-g'(x)$
$k\cdot f(x)$	$k\cdot f'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)\ +\ f(x)\cdot g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
$f\left(g(x)\right)$	$f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$