ตรรกศาสตร์

ประพจน์ (Proposition or Statements)

ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริง หรือ เป็นเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ค่าความจริง (Ture Value) คือสถานะที่เป็นจริง (Ture) หรือ เท็จ (Falues) อย่างใดอย่างหนึ่งของประพจน์

การเชื่อมประพจน์ (Proposition of connectives)

"และ"	$\wedge$
"หรือ"	$\vee$
"ถ้า...แล้ว	$\rightarrow$
"ก็ต่อเมื่อ"	$\leftrightarrow$

เมื่อให้ p และ q แทน ประพจน์

T แทนค่า ความจริงของประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง**

F แทนค่า ความจริงของประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

แบบฝึกหัด 1

1. **จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้**

   1) $(p \wedge q) \rightarrow \sim p$

   2) $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \wedge r)$

2. **ถ้า p เป็นเท็จ q เป็นจริง r เป็นเท็จ และ s เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์**

   1) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

   2) $(p \vee q) \rightarrow (\sim r \wedge s)$

3. จงหาค่าความจริงต่อไปนี้

1) ถ้า $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee t)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว จงหาค่าความจริงของ p,q,r,t

2) ถ้า $p \vee q$ มีค่าความเป็นเป็นจริง $(s \wedge r) \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ p q r s

สัจนิรันดร์

1. รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า สัจนิรันดร์ เช่น เป็นสัจนิรันดร์เพราะความจริงเป็นจริงทุกกรณี

ตัวอย่าง **จงพิจารณาว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่**

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริง ดังนี้

p	→	(p	∨	q)

2. การตรวจสอบว่ารูปแบบประพจน์ที่กำหนดให้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ นอกจากจะพิจารณาค่าความจริงทุกๆ กรณี โดยใช้ตารางค่าความจริงแล้ว อาจพิจารณาว่าประพจน์ในรูปแบบที่กำหนดสามารถเป็นเท็จได้หรือไม่ ถ้าเท็จไม่ได้เลยก็ต้องเป็นจริงเสมอ นั่นคือ สัจนิรันดร์

ตัวอย่าง $[p \rightarrow \sim q] \vee [\sim q \rightarrow p]$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)]$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

[(p	→	q)	∧	(p	∧	r)	↔	(p	→	(q	∧	r)]

ประพจน์ที่เป็นเท็จตลอด (Contradiction)

นิยาม ประพจน์ที่เป็นเท็จตลอดไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อยนั้นจะมีค่าความจริงเป็นอย่างไร เรียกประพจน์เหล่านั้นว่า ประพจน์ที่เป็นเท็จตลอด

ตัวอย่าง **จงพิจารณา** $(p \wedge q) \wedge (q \rightarrow \sim p)$

(p	$\wedge$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	$\sim$p)

ประพจน์ที่สมมูลกัน (Equivalent Statements)

ประพจน์ทั้งสองประพจน์จะสมมูลกันได้นั้น เมื่อนำประพจน์ทั้งสองประพจน์มาหาค่าความจริงในตารางอันเดียวกันแล้ว ย่อมได้ค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองเหมือนกันทุกประการ

เราใช้ $\equiv$ เป็นสัญลักษณ์แทน สมมูล

ตัวอย่าง **จงสร้างตารางค่าความจริงเพื่อพิสูจน์ว่า**

ประพจน์ $(p \rightarrow q)$ สมมูลกับประพจน์ $(\sim q \rightarrow \sim p)$

p	$\rightarrow$	q

$\sim$q	$\rightarrow$	$\sim$p

<u>ตัวอย่าง</u> จงสร้างตารางหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p)$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \leftrightarrow q]$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกัน

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $(p \rightarrow \sim p) \equiv \sim p$
3. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
4. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
5. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
8. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
9. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
10. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
11. $p \rightarrow q \equiv p \rightarrow (p \wedge q)$
12. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
13. $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow q$
14. $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
15. $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$
16. $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$
17. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q$
18. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
19. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
20. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
21. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
22. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$
23. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

<u>**ประพจน์ที่สมมูลกันที่ใช้มาก คือ**</u>

1. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
2. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
3. นิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $p \wedge \sim q$

แบบฝึกหัด 3

1. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ จงหาว่าประพจน์ใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

   1) $[p \rightarrow \sim q] \vee [q \rightarrow \sim p]$

   2) $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

2. จงตรวจสอบว่าประพจน์แต่ละคู่ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

   1) $\sim(p \wedge q)$ กับ $(\sim p) \wedge (\sim q)$

2) $p\to(\sim q)$ กับ $(\sim p)\vee(\sim q)$

ประโยคเปิด

คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร และไม่เป็นประพจน์ แต่เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์หรือเติมตัวบ่งปริมาณแล้วได้ประพจน์

ตัวอย่าง กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ จำนวนจริง

พิจารณา $x+y=5$ จะเห็นว่าเป็นประโยคเปิด เพราะมีตัวแปร x,y และเมื่อแทน x,y ด้วยจำนวนจริงใดๆ แล้วได้ประโยคใหม่เป็นประพจน์

Ex แทน $x=2,\ y=3$ ได้ $2+3=5$ เป็นจริง

แทน $x=3,\ y=4$ ได้ $3+4=5$ เป็นเท็จ

แต่ พิจารณา $x+y$ จะเห็นได้ว่า ไม่เป็นประโยค เพราะเมื่อแทน $x+y$ ด้วยจำนวนใดๆ แล้วก็ไม่ได้ประพจน์

Ex แทน $x=2,\ y=3$ ได้ $2+3$ ซึ่งไม่มีค่าความจริง

แทน $x=3,\ y=4$ ได้ $3+4$ ซึ่งไม่มีค่าความจริงเช่นกัน

$x^2<3$ เป็นประโยคเปิด เพราะไม่สามารถระบุค่าความจริงให้ชัดเจนว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

$2^2<3$ เป็นประพจน์ที่เกิดจากการแทนตัวแปรในประโยคเปิดข้างบนด้วย 2

มี $x\in R$ ซึ่ง $x^2<3$ เป็นประพจน์ที่เกิดจากการเติมตัวบ่งปริมาณ "มี $x\in R$"

วลีบ่งปริมาณ (Quantifies)

ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณมีส่วนประกอบ 3 ส่วน คือ ประโยคเปิด, ตัวบ่งปริมาณ $(\forall)$ หรือ $(\exists)$, และเอกภพสัมพัทธ์ $(\cup)$

ให้ x เป็นตัวแปรในประโยคเปิด P(x) และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ การบ่งบอกว่ามีสมาชิกใน U ที่สอดคล้อง P(x) กี่ตัว กระทำได้โดยใช้ตัวบ่งปริมาณตัวใดตัวหนึ่งต่อไปนี้

ตัวบ่งปริมาณ	**สัญลักษณ์**	**วัตถุประสงค์**
สำหรับ x ทุกตัว	$\forall$	เพื่อบ่งบอกว่าสมาชิกทุกตัวใน U สอดคล้องกับ P(x)
สำหรับ x บางตัว	$\exists$	เพื่อบ่งบอกว่ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน U สอดคล้องกับ P(x)

ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณของตัวแปรตัวเดียว

รูปแบบประโยค	ค่าความจริง
$\forall x[P(x)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยค P(x) ด้วยสมาชิกแต่ละตัวใน U แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ใน U ซึ่งเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
$\exists x[P(x)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน U ซึ่งเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง **เป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) ด้วยสมาชิก แต่ละตัวใน U แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ
$\forall x \forall y[P(x,y)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x และ y ในประโยคเปิด P(x,y) ด้วยสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ** ค่าตัวแปร x และ y ในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 คู่ ที่ทำให้ P(x,y) เป็นเท็จ
$\forall x \exists y[P(x,y)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อสำหรับสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ที่ใช้แทน x ในประโยคเปิด จะมีสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์แทนแล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง **เป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัวที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดแล้ว ไม่ว่าจะใช้สมาชิกตัวใดในเอกภพสัมพัทธ์แทน y จะได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ

$\exists x \forall y[P(x,y)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัวที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดแล้ว ไม่ว่าจะใช้สมาชิกตัวใดในอำภพสัมพัทธ์แทน y จะได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อสำหรับสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดจะมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัวที่ใช้แทน y แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
$\exists x \exists y[P(x,y)]$	**เป็นจริง** ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพันธ์อย่างน้อย 1 คู่ ที่ใช้แทน x และ y ในประโยคเปิดแล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง **เป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อสมาชิกแต่ละคู่ในเอกภพสัมพัทธ์เมื่อใช้แทน x และ y ในประโยคเปิดแล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

1. $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ เปลี่ยน $\forall$ เป็น $\exists$, เปลี่ยน $P(x)$ เป็น $\sim P(x)$
2. $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$ เปลี่ยน $\exists$ เป็น $\forall$, เปลี่ยน $P(x)$ เป็น $\sim P(x)$

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปร 2 ตัว

1. $\sim\forall x \forall y[P(x,y)] \equiv \exists x \exists y[\sim P(x,y)]$
2. $\sim\forall x \exists y[P(x,y)] \equiv \exists x \forall y[\sim P(x,y)]$
3. $\sim\exists x \forall y[P(x,y)] \equiv \forall x \exists y[\sim P(x,y)]$
4. $\sim\exists x \exists y[P(x,y)] \equiv \forall x \forall y[\sim P(x,y)]$

แบบฝึกหัด 4

จงหาค่าความจริงของประพจน์

1. $\forall x[x<0]$ $\quad\mathcal{U}=I$
2. $\forall x[x+8>8]$ $\quad\mathcal{U}=\{0,2,4,6,8\}$

ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x[x\geq 0]\leftrightarrow\forall x\,[x\geq 5]$

2. $\exists x[x>0]\rightarrow\forall x\,[2<x<5]$

จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x[2x+x^2=5]$
2. $\exists x[x^2+4x+1>0]$
3. $\forall x\exists y[x^2+y=y-1 \longrightarrow x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ$]$

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x\forall y[x+y^2>7]$ $\quad\mathcal{U}=\{3,4,5\}$

2. $\forall x\forall y[x+y<xy]$ $\quad\mathcal{U}=\{0,1,2\}$

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือ การอ้างว่าถ้าข้อความชุดหนึ่ง คือ p_1, p_2, ...,p_n เป็นจริงทุกข้อความแล้วสามารถสรุปข้อความ C เป็นจริงได้หรือไม่นั่นคือ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_n) \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ถ้าเป็นจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนั้น สมเหตุสมผล ถ้าไม่เป็นจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนั้น ไม่สมเหตุสมผล

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. q

ผล p

พิจารณาว่า $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติว่า $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ เป็นเท็จ

จะได้ $(p \rightarrow q) \wedge q$ เป็นจริง .... (1)

p เป็นเท็จ .... (2)

จาก (1) จะได้ $p \rightarrow q$ เป็นจริง

q เป็นจริง

จะเห็นได้ว่า $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ เป็นเท็จได้ เมื่อ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

เนื่องจาก $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น การอ้างเหตุผลกำหนดให้ไม่สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด 5

การให้เหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

1) เหตุ 1. ถ้านายดำป่วย นายดำจะไปหาหมอ

2. นายดำไม่ได้ไปหาหมอ

ผล นายดำป่วย

2) เหตุ 1. ถ้าข้าพเจ้าร่ำรวยแล้วข้าพเจ้าจะสมัคร ส.ส.

2. ถ้าข้าพเจ้าไม่เป็นครูแล้วข้าพเจ้าจะสมัคร ส.ส.

ผล ถ้าข้าพเจ้าร่ำรวยแล้ว ข้าพเจ้าจะไม่เป็นครู